MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

K. KNOPP
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR A. E. INGHAM
H. KNESER W. MAGNUS O. PERRON
W. SÜSS H. WEYL

60. BAND 4. (SCHLUSS-)HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 17. SEPTEMBER 1954)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1954

th. Z.

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp, E. Schmidt* u *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 19 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt,* 19 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt,* der 1952 die Herausgabe übernahm.

Die Zeitschrift erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Band beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden au Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit s mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskript und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprach und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahre das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten ang nommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sin und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. D Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in g lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrif für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildung sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommende griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr vo Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z. B. die Landauschen Symbole *o* und sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. D Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugebe

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herr Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen soll dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,
K. Knopp, Tübingen, Am Apfelberg 6,
R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Mäntytie 5 B,
E. Schmidt, Berlin-Steglitz, Sedanstraße 8,
F. K. Schmidt, Heidelberg, Mathematisches Institut
H. Wielandt, Tübingen, Biesingerstraße 7.

Springer-Verlag OHG — Berlin W 35, Reichpietschufer 20. — Heidelberg, Neuenheimer Lan straße 24. — Göttingen, Weender Straße 60.

Vertriebsvertretung des Verlages im Ausland:

Lange, Maxwell & Springer Ltd., 242 Marylebone Road, London N.W. 1.

---

60. Band **Inhalt** 4. (Schluß-)He

Sei

Velte, W., Zur Variationsrechnung mehrfacher Integrale 3

Klingenberg, W., Projektive und affine Ebenen mit Nachbarelementen 3

Wielandt, H., Zum Satz von Sylow 4

Huppert, B., Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen . . . 4

Thimm, W., Meromorphe Abbildungen von Riemannschen Bereichen 4

Hämisch, W., Über die Topologie in der Algebra 4

Hahn, W., Über einige Grenzwertbeziehungen bei unendlichen Produkten. 4

VELTE, W.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 367—383 (1954)

Zur Variationsrechnung mehrfacher Integrale.

Von

WALDEMAR VELTE.

Bekanntlich gibt es bei mehrfachen Variationsintegralen in gewöhnlicher Form eine ganze Schar von Theorien, die sich durch Verwendung verschiedener unabhängiger Integrale unterscheiden, und die zu verschiedenen hinreichenden Legendreschen Bedingungen bzw. $\mathcal{E}$-Funktionen führen (vgl. [*12*], [*3*]). Insbesondere sind in dieser Schar von Theorien die De Donder-Weylsche und die Carathéodorysche als Sonderfälle enthalten (vgl. [*16*], [*6*], [*2*], [*10*]). Die erste hat den Vorzug, daß sie sehr einfache (lineare) Formeln liefert, während man zwangsläufig auf die Carathéodorysche „Determinantenmethode" geführt wird, wenn man nach einer Theorie sucht, die auch auf Probleme mit beweglichem Rand anwendbar ist (vgl. [*3*], [*4*]).

Es scheint, daß analoge Untersuchungen für Variationsintegrale in Parameterdarstellung bisher noch nicht angestellt worden sind. Auf die Anregung von H. BOERNER hin wird daher im folgenden eine Theorie von Variationsintegralen der Form $\int f(x_i, p_{i_1 \dots i_m})\, dt_1 \dots dt_m$ [die $p_{i_1 \dots i_m}$ sind die Richtungskoordinaten der Matrix $(\partial x_i / \partial t_\alpha)$, $\alpha = 1, 2, \dots, m$; $i = 1, 2, \dots, n$; $m < n$] entwickelt, die über $\mathcal{E}$-Funktion, hinreichende Legendresche Bedingung, Hamilton-Jacobische Differentialgleichung bis zur Einbettung einer gegebenen Extremalen in ein geodätisches Feld führt. Sie stellt das Analogon zur Carathéodoryschen Theorie dar, ist also insbesondere auf Probleme mit beweglichem Rand anwendbar. Die Theorie in Parameterdarstellung wird besonders dadurch gerechtfertigt, daß sie einfacher und übersichtlicher ist als die analoge Theorie in gewöhnlicher Form, weil sie in den $p_{i_1 \dots i_m}$ linear wird.

Um $\mathcal{E}$-Funktion und Legendresche Bedingung herzuleiten, wird vom Kalkül der alternierenden Differentialformen Gebrauch gemacht. Für den Sonderfall $m = n - 1$ findet sich die Legendresche Bedingung schon bei RADON [*14*]. Die benutzte Legendresche Transformation reduziert sich für $m = 2$, $n = 3$ auf die von HAAR im Zusammenhang mit adjungierten Variationsproblemen verwendete Transformation ([*9*], [*7*]).

In einer früheren Arbeit [*15*], auf die kein Bezug genommen wird, wurde bereits der Sonderfall behandelt, in dem die partiellen Ableitungen von $f(x, p)$ nach $p_{i_1 \dots i_m}$ selbst wieder Komponenten eines m-Vektors sind, d.h. als Richtungskoordinaten einer Matrix gedeutet werden können. Allerdings waren die Ergebnisse insofern weniger allgemein, als von den „regulären Flächenelementen" dort mehr verlangt wurde als hier. Die Methode des Einbettungsbeweises ist von dort in wesentlich vereinfachter Form übernommen worden.

1. Im folgenden durchläuft der Index i stets die Werte $i=1, 2, \ldots, n$ $(2\leq n)$, der Index α die Werte $\alpha=1, 2, \ldots, m$ $(m<n)$. Wir betrachten dann im Raum der $n+\binom{n}{m}$ Variablen x_i und $p_{i_1\ldots i_m}$ $(i_1<i_2<\cdots<i_m)$ eine Funktion $f(x_i, p_{i_1\ldots i_m})$, für die bisweilen auch kürzer $f(x, p)$ geschrieben wird. Sie soll nach allen Variablen so oft stetig differenzierbar sein wie es im folgenden benötigt wird. Ferner sei $f(x, p)$ positiv homogen erster Ordnung in den $p_{i_1\ldots i_m}$

$$f(x, cp)=cf(x, p) \quad (\text{für } c>0). \tag{1.1}$$

Unter Benutzung der Abkürzungen $p_{(i)}=p_{i_1\ldots i_m}$ und $f_{(i)}=\dfrac{\partial f}{\partial p_{(i)}}$ erhält man aus (1.1) in bekannter Weise

$$f_{(i)}(x, cp)=f_{(i)}(x, p) \quad (\text{für } c>0) \tag{1.2}$$

$$f_{(i)}(x, p)\,p_{(i)}=f(x, p), \qquad f_{(i)(k)}\,p_{(k)}=0 \quad \text{bzw.} \quad \det(f_{(i)(k)})=0. \tag{1.3}$$

(Über doppelte Indizes ist zu summieren, also $f_{(i)}p_{(i)}=\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_m} f_{i_1\ldots i_m}p_{i_1\ldots i_m}$ usw.)

Das zu $f(x, p)$ gehörige Variationsproblem lautet

$$\int f(x_i, p_{(i)})\,dt_1\ldots dt_m=\text{extr.}, \tag{1.4}$$

wobei für $p_{(i)}$ die Grassmannschen Richtungskoordinaten der Matrix $(\partial x_i/\partial t_\alpha)$, d.h. die aus je m Zeilen gebildeten Determinanten einzusetzen sind. Wegen (1.1) ist das Variationsintegral invariant gegenüber Parametertransformationen mit positiver Funktionaldeterminante, und umgekehrt kann jedes gegenüber Parametertransformationen invariante Variationsintegral $\int' f\left(x_i, \dfrac{\partial x_i}{\partial t_\alpha}\right)dt_1\ldots dt_m$ auch in der Form (1.4) mit (1.1) geschrieben werden (vgl. [8] oder [13]).

Es sei kurz an einige Eigenschaften der Richtungskoordinaten erinnert. Sie sind homogene Koordinaten, d.h. sie liegen unabhängig von der Wahl der Vektoren, die das betrachtete Flächenelement aufspannen, bis auf einen gemeinsamen Faktor eindeutig fest. Allerdings sind sie, wenn $2\leq m\leq n-2$ ist, nicht unabhängig voneinander. Vielmehr genügen sie dann gewissen Gleichungen, die die Grassmannsche Mannigfaltigkeit oder den Grassmannschen Kegel definieren (vgl. etwa [1]):

$$p_{i_1 i_2 i_3\ldots i_m}p_{k_1 k_2 i_3\ldots i_m}-p_{k_1 i_2 i_3\ldots i_m}p_{i_1 k_2 i_3\ldots i_m}-p_{k_2 i_2 i_3\ldots i_m}p_{k_1 i_1 i_3\ldots i_m}=0 \tag{1.5}$$

$(i_\alpha, k_\beta=1, 2, \ldots, n)$. Als Determinanten sind die $p_{i_1\ldots i_m}$ natürlich schiefsymmetrisch in den Indizes. Gibt man sich umgekehrt schiefsymmetrische Größen $p_{i_1\ldots i_m}$ vor, die den Gln. (1.5) genügen, so läßt sich stets auch eine Matrix $(x_{i\alpha})$ angeben, deren Richtungskoordinaten sie sind. (Und zwar lassen sich die $x_{i\alpha}$ rational durch die $p_{i_1\ldots i_m}$ ausdrücken. Sind dann insbesondere die $p_{i_1\ldots i_m}$ k-mal stetig differenzierbare Funktionen eines Parameters t, so gilt das gleiche von den $x_{i\alpha}$.)

Drückt man die Gln. (1.5) vermöge der schiefen Symmetrie der $p_{i_1 \dots i_m}$ allein durch die $p_{(i)}$ mit $i_1 < i_2 < \cdots < i_m$ aus, und dividiert[1]) man sie dann noch durch $\sqrt{p_{(i)}\, p_{(i)}}$, so lassen sie sich, in irgendeiner Weise durchnumeriert, in der Gestalt

$$b_\varrho(p) = 0 \quad (\varrho = 1, 2, \dots) \tag{1.6}$$

schreiben, wobei die Funktionen $b_\varrho(p)$ positiv homogen erster Ordnung sind, also den Gleichungen

$$b_\varrho(p) = \frac{\partial b_\varrho}{\partial p_{(i)}}\, p_{(i)} \tag{1.7}$$

genügen.

Für das Variationsproblem interessieren die Werte von $f(x, p)$ also nur auf (1.6). Zwei Grundfunktionen $f(x, p)$ und $'f(x, p)$ (bzw. die zugehörigen Variationsintegrale) werden *kongruent* genannt, wenn man $f(x, p) = 'f(x, p)$ auf $b_\varrho(p) = 0$ hat. Es ist klar, daß kongruente Funktionen dasselbe Variationsproblem liefern.

Im allgemeinen sind die Funktionen $b_\varrho(p)$ nicht unabhängig voneinander, d.h. im allgemeinen ist ihre Anzahl größer als der Rang r der Matrix $(\partial b_\varrho / \partial p_{(i)})$. Wir werden daher bisweilen ein Teilsystem von r Funktionen $b_{\varrho'}(p)$ $(\varrho' = \varrho_1, \dots, \varrho_r)$ auswählen mit Rang $(\partial b_{\varrho'} / \partial p_{(i)}) = r$ an der betrachteten Stelle.

Schließlich sei noch daran erinnert, daß die Extremalen von (1.4) in einer von der Wahl der Parameter unabhängigen Weise erklärt sind, nämlich durch das Verschwinden der ersten Variation bei einer beliebigen Schar von Vergleichsflächen $x_i = x_i(\tau, t_\alpha)$ mit gemeinsamem Rand, wobei die Funktion $I(\tau) = \int_G f\big(x(\tau, t_\alpha), p(\tau, t_\alpha)\big)\, dt_1 \dots dt_m$ und damit auch $dI/d\tau$ von der Wahl der Parameter t_α nicht abhängt. Im folgenden werden nur solche Extremalen betrachtet, die als zweimal differenzierbare Funktionen der Parameter gegeben sind und daher den Eulerschen Differentialgleichungen genügen:

$$f_{x_i} = \frac{\partial f_{x_{i\alpha}}}{\partial t_\alpha} \qquad \left(\text{mit } f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i},\ f_{x_{i\alpha}} = \frac{\partial f}{\partial x_{i\alpha}}\right). \tag{1.8}$$

2. *Geodätische Felder. E-Funktion.* Wir betrachten die Schar kongruenter Funktionen

$$f(x, p) + B(x, p). \tag{2.1}$$

Hier ist $B(x, p)$ eine beliebige Funktion mit $B(x, c\,p) = c\,B(x, p)$ (für $c > 0$) und

$$B(x, p) = 0 \quad \text{auf} \quad b_\varrho(p) = 0. \tag{2.2}$$

Es ist klar, daß jede zu $f(x, p)$ kongruente Funktion $'f(x, p)$ in der Form (2.1) geschrieben werden kann: Man braucht nur $B(x, p) = 'f(x, p) - f(x, p)$ zu setzen.

[1]) Der Punkt $p = 0$, d.h. die Spitze des Kegels, ist bei allen Betrachtungen ausgeschlossen.

Die Funktionen der Schar (2.1) sind natürlich wieder positiv homogen erster Ordnung in den $p_{(i)}$. Insbesondere hat man

$$f(x,p)+B(x,p)=\left(f_{(i)}(x,p)+B_{(i)}(x,p)\right)p_{(i)}. \tag{2.3}$$

Wir betrachten nun über dem Raum der $n+\binom{n}{m}$ Variablen x_i und $p_{(i}$ die äußere Differentialform

$$\Omega=\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_m}\left(f_{i_1\ldots i_m}(x,p)+B_{i_1\ldots i_m}(x,p)\right)dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_m}. \tag{2.4}$$

Ferner sei $(x,\pi(x))$ ein Feld von m-dimensionalen Flächenelementen, wobei die (x) in einem gewissen Gebiet des Raumes der x_i als stetig differenzierbare Funktionen erklärt sind. Trägt man $p=\pi(x)$ in (2.4) ein, so geht Ω über in eine Form $[\Omega]$, die über dem Raum der x_i erklärt ist:

$$[\Omega]=[f_{(i)}+B_{(i)}]\,dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_m}=\left(f_{(i)}(x,\pi(x))+B_{(i)}(x,\pi(x))\,dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_m}\right. \tag{2.5}$$

Definition. Das Feld $(x,\pi(x))$ heißt *geodätisch* bezüglich $f(x,p)+B(x,p)$, wenn $d[\Omega]=0$ ist.

Ist V eine $(m+1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit, die ganz im geodätischen Feld gelegen ist, und ist R ihr m-dimensionaler Rand, so ist nach dem Stokesschen Satz

$$\int_R[\Omega]=\pm\int_V d[\Omega]=0.$$

(Auf das Vorzeichen, d.h. die Orientierung kommt es hier nicht an.) Daraus folgt also, daß $\int[\Omega]$ vom Wege unabhängig ist, d.h. wenn $\overline{E}$ und E zwei Flächen mit gemeinsamem Rand sind, die beide im geodätischen Feld verlaufen, so ist

$$\int_{\overline{E}}[\Omega]=\int_E[\Omega] \tag{2.6}$$

oder, bei Benutzung von Parametern,

$$\int_{\overline{E}}[f_{(i)}+B_{(i)}]\,p_{(i)}\,dt_1\ldots dt_m\int_E=[f_{(i)}+B_{(i)}]\,p_{(i)}\,dt_1\ldots dt_m.$$

Es sei nun E in das geodätische Feld eingebettet, d.h. die an E tangentialen Flächenelemente seien zugleich Flächenelemente des Feldes. Dann ist

$$I_E=\int_E\left(f(x,p)+B(x,p)\right)dt_1\ldots dt_m=\int_{\overline{E}}[f_{(i)}+B_{(i)}]\,p_{(i)}\,dt_1\ldots dt_m.$$

Daraus folgt

$$I_{\overline{E}}-I_E=\int_{\overline{E}}\left(f(x,p)+B(x,p)\right)dt_1\ldots dt_m-\int_{\overline{E}}[f_{(i)}+B_{(i)}]\,dt_1\ldots dt_m=\int_{\overline{E}}\mathcal{E}\,dt_1\ldots dt_m$$

mit

$$\mathcal{E}(x,\overline{p},\pi)=f(x,\overline{p})+B(x,\overline{p})-\left(f_{(i)}(x,\pi(x))+B_{(i)}(x,\pi(x))\right)\overline{p}_{(i)}, \tag{2.7}$$

wobei $\mathcal{E}(x,\overline{p},\pi)$ nichts anderes ist als die *Weierstraßsche $\mathcal{E}$-Funktion*. Das ergibt unmittelbar

Satz 2.1. *Hinreichend für ein starkes Minimum ist, daß man das betrachtete Flächenstück in ein geodätisches Feld einbetten kann und daß außerdem die zugehörige $\mathcal{E}$-Funktion für $b_\varrho(\bar{p})=0$ nichtnegativ ist. (Von den Vergleichsflächen wird nur verlangt, daß sie im Feld verlaufen.)*

3. *Legendresche Bedingung.* Um zu hinreichenden Bedingungen für ein schwaches Minimum zu gelangen, verfährt man wie üblich: Taylor-Entwicklung von $f(x,\bar{p})+B(x,\bar{p})$ an der Stelle π liefert für die $\mathcal{E}$-Funktion

$$(3.1)\quad \begin{cases} \mathcal{E}(x,\bar{p},\pi)=f(x,\bar{p})+B(x,\bar{p})-f(x,\pi)-B(x,\pi)-[f_{(i)}+B_{(i)}](\bar{p}_{(i)}-\pi_{(i)}) \\ \qquad\quad =\frac{1}{2}\{\tilde{f}_{(i)(k)}+\tilde{B}_{(i)(k)}\}(\bar{p}_{(i)}-\pi_{(i)})(\bar{p}_{(k)}-\pi_{(k)}), \end{cases}$$

und die Bedingungen $b_\varrho(\bar{p})=b_\varrho(\pi)=0$ lassen sich in der Form

$$(3.2)\qquad \frac{\partial\tilde{b}_\varrho}{\partial p_{(i)}}(\bar{p}_{(i)}-\pi_{(i)})=0$$

schreiben. (Hierbei bezeichnet $\sim$ ganz allgemein eine Mittelwertbildung.) Dies führt zur Betrachtung der Schar quadratischer Formen

$$(3.3)\qquad Q(B)=\{f_{(i)(k)}(x,p)+B_{(i)(k)}(x,p)\}\xi_{(i)}\xi_{(k)}$$

mit den Nebenbedingungen

$$(3.4)\qquad \frac{\partial b_\varrho}{\partial p_{(i)}}\xi_{(i)}=0.$$

Diese quadratischen Formen sind auch unter den Nebenbedingungen (3.4) niemals definit, denn man braucht nur $\xi_{(i)}=p_{(i)}$ mit $b_\varrho(p)=0$ zu setzen, um einmal $\frac{\partial b_\varrho}{\partial p_{(i)}}\xi_{(i)}=b_\varrho(p)=0$ d.h. (3.4) zu erfüllen und zum anderen wegen der Homogenität der Funktion $f(x,p)+B(x,p)$ in den $p_{(i)}$ auch

$$\{f_{(i)(k)}(x,p)+B_{(i)(k)}(x,p)\}p_{(i)}p_{(k)}=0$$

zu haben.

Definition. Ein Flächenelement (x,p) heißt *positiv (negativ) regulär* bezüglich $f(x,p)+B(x,p)$, wenn die zugehörige quadratische Form (3.3) unter den Nebenbedingungen (3.4) und der zusätzlichen Bedingung

$$(3.5)\qquad p_{(i)}\xi_{(i)}=0$$

positiv (negativ) definit ist.

Satz 3.1. *Hinreichend für ein schwaches Minimum ist, daß man das betrachtete Flächenstück in ein geodätisches Feld einbetten kann und daß außerdem alle Flächenelemente des Flächenstückes positiv regulär sind, d.h. daß die zugehörige Legendresche Bedingung*

$$Q(B)=\{f_{(i)(k)}+B_{(i)(k)}\}\xi_{(i)}\xi_{(k)}>0 \quad \text{für} \quad \frac{\partial b_\varrho}{\partial p_{(i)}}\xi_{(i)}=p_{(i)}\xi_{(i)}=0$$

erfüllt ist.

Beweis. Es sei $f+B$ diejenige Grundfunktion, bezüglich deren das geodätische Feld konstruiert wurde. Wir setzen $'f=f+B$, lassen aber den

Strich im folgenden der Einfachheit halber fort. Die $\mathcal{E}$-Funktion hat dann die Gestalt

$$(3.6) \qquad \mathcal{E}(x, \overline{p}, \pi) = f(x, \overline{p}) - f_{(i)}(x, \pi)\,\overline{p}_{(i)} = \tfrac{1}{2} \tilde{f}_{(i)(k)} (\overline{p}_{(i)} - \pi_{(i)})(\overline{p}_{(k)} - \pi_{(k)}).$$

Nun ist aber die $\mathcal{E}$-Funktion positiv homogen erster bzw. nullter Ordnung in $\overline{p}$ bzw. π. Wenn man lediglich das Vorzeichen von $\mathcal{E}$ feststellen will, darf man sich daher auf solche $\overline{p}, \pi$ beschränken, die mittels $\sum \overline{p}_{(i)}^2 = \sum \pi_{(i)}^2 = 1$ normiert sind, d.h. es genügt, (3.6) unter den Nebenbedingungen

$$b_\varrho(\overline{p}) = b_\varrho(\pi) = 0, \qquad \text{bzw.} \qquad \sum \overline{p}_{(i)}^2 - 1 = \sum \pi_{(i)}^2 - 1 = 0$$

oder

$$(3.7) \qquad \frac{\partial \widetilde{b}_\varrho}{\partial p_{(i)}} (\overline{p}_{(i)} - \pi_{(i)}) = 0, \qquad \tilde{p}_{(i)} (\overline{p}_{(i)} - \pi_{(i)}) = 0$$

zu betrachten. Alles übrige folgt nun wie üblich aus einem Satz über quadratische Formen mit linearen Nebenbedingungen, den man z. B. bei CARATHÉODORY[2]) findet:

Das Minimum der quadratischen Form

$$Q = f_{(i)(k)} \xi_{(i)} \xi_{(k)} \qquad \text{mit den Bedingungen} \qquad \frac{\partial b_{\varrho'}}{\partial p_{(i)}} \xi_{(i)} = p_{(i)} \xi_{(i)} = 0$$

auf der Punktmenge $\xi_{(i)} \xi_{(i)} = 1$ ist gleich der kleinsten Wurzel λ_1 der charakteristischen Gleichung

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} f_{(i)(k)} - \lambda \delta_{(i)(k)} & \dfrac{\partial b_{\sigma'}}{\partial p_{(i)}} & p_{(i)} \\ \dfrac{\partial b_{\varrho'}}{\partial p_{(k)}} & 0 & \\ p_{(k)} & & \end{vmatrix} = 0.$$

(Alle Wurzeln sind reell.)

Für ein positiv reguläres Flächenelement (x^0, π^0) sind daher alle Wurzeln λ_i positiv. Und da die Wurzeln stetige Funktionen von $f_{(i)(k)}$, $\dfrac{\partial b_{\varrho'}}{\partial p_{(i)}}$ und $p_{(i)}$ sind, sind auch die Wurzeln $\tilde{\lambda}_i$ von

$$\widetilde{D}(\lambda) = \begin{vmatrix} \tilde{f}_{(i)(k)} - \lambda \delta_{(i)(k)} & \dfrac{\partial \widetilde{b}_{\sigma'}}{\partial p_{(i)}} & \tilde{p}_{(i)} \\ \dfrac{\partial \widetilde{b}_{\varrho'}}{\partial p_{(k)}} & 0 & \\ \tilde{p}_{(k)} & & \end{vmatrix} = 0$$

alle positiv, sofern sich die $\tilde{f}_{(i)(k)}$, $\dfrac{\partial \widetilde{b}_{\varrho'}}{\partial p_{(i)}}$ und $\tilde{p}_{(i)}$ nur genügend wenig von $f_{(i)(k)}(x^0, \pi^0)$ usw. unterscheiden. Und dies ist gewiß der Fall für die Flächenelemente $(x, \overline{p})$ einer gewissen Umgebung $|x_i - x_i^0| < \varepsilon$, $|\overline{p}_{(i)} - \pi_{(i)}^0| < \varepsilon$. Für diese Flächenelemente $(x, \overline{p})$ hat man dann $\mathcal{E}(x, \overline{p}, \pi^0) \geqq 0$, und zwar auch dann, wenn man nachträglich wieder auf die Normierung der $\overline{p}$ und π ver-

[2]) Siehe [5] Kap. 11 (Gewöhnliche Maxima und Minima).

zichtet. Daraus folgt dann unmittelbar, daß eine Fläche E mit lauter positiv regulären Flächenelementen ein schwaches Minimum liefert, d.h. ein Minimum bezüglich einer im geodätischen Feld verlaufenden Vergleichsfläche, die genügend dicht bei E bleibt und auch in der Richtung nicht zu stark von E abweicht.

4. *Das Carathéodorysche unabhängige Integral.* Wir wollen uns jetzt der Frage zuwenden, ob es stets möglich ist, eine gegebene Extremale, d.h. Lösung der Eulerschen Differentialgleichungen, in ein geodätisches Feld einzubetten. Allerdings wird im folgenden nicht der allgemeine Fall behandelt, sondern es wird über die Funktion $B(x, p)$ in geeigneter Weise verfügt. Und zwar läßt sich unter der Voraussetzung

$$f(x, p) > 0 \quad \text{auf} \quad b_\varrho(p) = 0 \tag{4.1}$$

die Funktion $B(x, p)$ so wählen, daß die Funktion $f^*(x, p) = f(x, p) + B(x, p)$ die Eigenschaft

$$b_\varrho(f^*_{(i)}) = 0 \quad \text{auf} \quad b_\varrho(p) = 0$$

besitzt, d.h. daß mit $p_{(i)}$ auch $f^*_{(i)} = \partial f^* / \partial p_{(i)}$ der Grassmannschen Mannigfaltigkeit angehört. Dies ist eine einfache Folgerung aus dem

Satz 4.1 (H. Kneser). *Es lassen sich Funktionen $u_{(i)}(x, p)$ erklären, die in den p positiv homogen nullter Ordnung sind und nach allen Variablen ebenso oft stetig differenzierbar wie $f_{(i)}(x, p)$, so daß auf der Grassmannschen Mannigfaltigkeit (in unserer Schreibweise also auf $b_\varrho(p) = 0$, bzw. $\frac{\partial b_\varrho}{\partial p_{(i)}} dp_{(i)} = 0$) stets*

$$u_{(i)} p_{(i)} = f_{(i)} p_{(i)}, \quad u_{(i)} dp_{(i)} = f_{(i)} dp_{(i)}, \quad b_\varrho(u_{(i)}) = 0 \tag{4.4}$$

erfüllt ist[3]).

Die Gln. $(4.4)_2$ $(u_{(i)} - f_{(i)})\, dp_{(i)} = 0$ bedeuten geometrisch einfach, daß im Raum der Variablen $p_{(i)}$ der Vektor mit den Komponenten $(u_{(i)} - f_{(i)})$ im Punkte p auf der Grassmannschen Mannigfaltigkeit senkrecht steht und daher in der Form

$$(u_{(i)} - f_{(i)}) = a_{\varrho'} \frac{\partial b_{\varrho'}}{\partial p_{(i)}}$$

geschrieben werden kann[4]). Auflösen nach $a_{\varrho'}$ liefert $a_{\varrho'} = A_{\varrho'}(x, p)$, wobei die $A_{\varrho'}(x, p)$ positiv homogen nullter Ordnung in p sind und außerdem ebensooft stetig differenzierbar wie die $f_{(i)}(x, p)$. Die Funktion

$$f^*(x, p) = f(x, p) + B(x, p) \quad \text{mit} \quad B(x, p) = A_{\varrho'}(x, p) \cdot b_{\varrho'}(p)$$

besitzt dann wegen $f^*_{(i)} \equiv f_{(i)} + A_{\varrho'} \frac{\partial b_{\varrho'}}{\partial p_{(i)}} \equiv u_{(i)} \pmod{b_\varrho(p)}$ in der Tat die Eigenschaft $b_\varrho(f^*_{(i)}) = 0$ für $b_\varrho(p) = 0$.

---

[3]) Bei Kneser [11] findet man den Beweis des Satzes nur für $m = 2$ (n beliebig). Der Vollständigkeit halber wird daher am Schluß der Arbeit ein Beweis des Satzes angegeben.

[4]) Bezüglich der $b_{\varrho'}(p)$ s. Abschnitt 1.

Das im folgenden eingeführte unabhängige Integral ist das in Parameterdarstellung geschriebene Integral der Carathéodoryschen „Determinantenmethode", das den Vorzug besitzt, auch auf Probleme mit beweglichem Rand anwendbar zu sein, worauf hier aber nicht näher eingegangen werden soll.

Zu diesem Zweck geht man von mindestens zweimal stetig differenzierbaren Funktionen $S_\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, m)$ aus. Mit $s_{(i)}$ seien die Richtungskoordinaten der Matrix $\left(\frac{\partial S_\alpha}{\partial x_i}\right)$ bezeichnet. Dann ist die äußere Differentialform

$$\omega = dS_1 \wedge \cdots \wedge dS_m = \sum_{i_1 < \ldots < i_m} s_{i_1 \ldots i_m} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_m} \tag{4.5}$$

offensichtlich ein vollständiges Differential und daher

$$\int \omega = \int s_{(i)} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_m} \tag{4.6}$$

vom Wege unabhängig, d.h. man hat nach dem Stokesschen Satz $\int_{\bar{E}} \omega = \int_E \omega$, wenn $\bar{E}$ und E zwei m-dimensionale Flächenstücke mit demselben Rand sind. Bei Benutzung einer Parameterdarstellung $x_i = x_i(t_1, \ldots, t_m)$ der betrachteten Flächen geht $\int \omega$ über in $\int \Delta \, dt_1 \ldots dt_m$ mit der Carathéodoryschen Determinante

$$\Delta = \left| \frac{\partial S_\alpha}{\partial t_\beta} \right| = s_{(i)}(x) \, p_{(i)}.$$

Es soll nun versucht werden, Funktionen $S_\alpha(x_i)$ und ein geodätisches Feld $(x, \pi(x))$, in das die gegebene Extremale eingebettet ist, so zu finden, daß $\omega = [\Omega]$ d.h. $s_{(i)}(x) = f_{(i)}(x, \pi(x))$ gilt. Dazu werden noch einige Vorbereitungen benötigt.

5. *Zur Regularität.* Die regulären Flächenelemente lassen sich unter der Voraussetzung (4.1) auch folgendermaßen charakterisieren:

Satz 5.1. *Ein Flächenelement (x, p) ist dann und nur dann positiv regulär, wenn die quadratische Form*

$$Q_1 = \frac{\partial^2 \frac{1}{2} f^2}{\partial p_{(i)} \partial p_{(k)}} \xi_{(i)} \xi_{(k)} \tag{5.1}$$

unter den Nebenbedingungen (3.4) *positiv definit ist.*

Beweis. Zunächst darf man in der Definition der regulären Flächenelemente die Nebenbedingung (3.5) $p_{(i)} \xi_{(i)} = 0$ durch $f_{(i)} \xi_{(i)} = 0$ ersetzen. Um das zu zeigen, betrachten wir nebeneinander

$$Q = f_{(i)(k)} \xi_{(i)} \xi_{(k)} \quad \text{mit} \quad \frac{\partial b_\varrho}{\partial p_{(i)}} \xi_{(i)} = 0, \quad p_{(i)} \xi_{(i)} = 0 \tag{5.2}$$

und

$$\overline{Q} = f_{(i)(k)} \eta_{(i)} \eta_{(k)} \quad \text{mit} \quad \frac{\partial b_\varrho}{\partial p_{(i)}} \eta_{(i)} = 0, \quad f_{(i)} \eta_{(i)} = 0. \tag{5.3}$$

Im folgenden bezeichne ξ und η immer Vektoren, die den Gleichungen $p_{(i)} \xi_{(i)} = 0$ bzw. $f_{(i)} \eta_{(i)} = 0$ genügen. Es sei nun p ein beliebiger Vektor mit $|p| \neq 0$, $b_\varrho(p) = 0$. Dann spannt p mit jeder der Hyperebenen $p_{(i)} \xi_{(i)} = 0$

und $f_{(i)}\eta_{(i)}=0$ zusammen den vollen Raum auf, denn man hat $p_{(i)}p_{(i)}\neq 0$, $_{(i)}p_{(i)}=f\neq 0$. Es kann also jeder Vektor ξ in der Form $\xi=\alpha p+\eta$ geschrieben werden und umgekehrt jeder Vektor η in der Form $\eta=-\alpha p+\xi$. Aus $\xi\neq 0$ folgt $\eta\neq 0$ und umgekehrt. Weiter folgt aus $\frac{\partial b_\varrho}{\partial p_{(i)}}\xi_{(i)}=0$ auch $\frac{\partial b_\varrho}{\partial p_{(i)}}(\alpha p_{(i)}+\eta_{(i)})=\frac{\partial b_\varrho}{\partial p_{(i)}}\eta_{(i)}=0$ und umgekehrt. Man kann daher schreiben

$$Q=f_{(i)(k)}(\alpha p_{(i)}+\eta_{(i)})(\alpha p_{(k)}+\eta_{(k)})=f_{(i)(k)}\eta_{(i)}\eta_{(k)}=\overline{Q}\quad\text{(wegen } f_{(i)(k)}p_{(k)}=0),$$

d.h. man kann (5.2) durch (5.3) ersetzen und umgekehrt.

Weiter ist $Q_1=f f_{(i)(k)}\xi_{(i)}\xi_{(k)}+(f_{(i)}\xi_{(i)})^2=f\,Q+(f_{(i)}\xi_{(i)})^2$. Ist nun (x,p) positiv regulär, so ist unter den Bedingungen (3.4) $Q\geqq 0$, und unter der zusätzlichen Bedingung $f_{(i)}\xi_{(i)}=0$ hat man sogar $Q>0$. In jedem Falle ist also $Q_1>0$ unter den Nebenbedingungen (3.4). Ist umgekehrt (x,p) nicht positiv regulär, dann ist selbst unter der zusätzlichen Bedingung $f_{(i)}\xi_{(i)}=0$ die Form $Q_1=f\,Q$ nicht positiv definit.

Anmerkung. Für positiv reguläre Flächenelemente ist also (vgl. [5], Kap. 11)

$$D=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2\frac{1}{2}f^2}{\partial p_{(i)}\partial p_{(k)}} & \frac{\partial b_{\sigma'}}{\partial p_{(k)}}\\ \frac{\partial b_{\varrho'}}{\partial p_{(i)}} & 0\end{vmatrix}\neq 0. \tag{5.4}$$

6. *Die Legendresche Transformation.* Wir führen vorübergehend r weitere Variable $\mu_{\varrho'}$ ein und setzen $g(x,p,\mu)=f(x,p)+\mu_{\varrho'}b_{\varrho'}(p)$ und transformieren $p_{(i)},\mu_{\varrho'}$ auf neue Größen $P_{(i)},M_{\varrho'}$ mittels

$$P_{(i)}=g\,g_{(i)},\qquad M_{\varrho'}=b_{\varrho'}(p)\qquad\left(g_{(i)}=\frac{\partial g}{\partial p_{(i)}}\right). \tag{6.1}$$

Die zugehörige Funktionaldeterminante

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial^2\frac{1}{2}g^2}{\partial p_{(i)}\partial p_{(k)}} & g\frac{\partial b_{\sigma'}}{\partial p_{(k)}}+b_{\sigma'}g_{(k)}\\ \frac{\partial b_{\varrho'}}{\partial p_{(i)}} & 0\end{vmatrix}$$

reduziert sich für $\mu_{\varrho'}=0$, $b_{\varrho'}(p)=0$ auf

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial^2\frac{1}{2}f^2}{\partial p_{(i)}\partial p_{(k)}} & \frac{\partial b_{\sigma'}}{\partial p_{(k)}}\\ \frac{\partial b_{\varrho'}}{\partial p_{(i)}} & 0\end{vmatrix}\cdot f^{\binom{n}{m}}=D\cdot f^{\binom{n}{m}}.$$

Wegen (5.4) läßt sich daher (6.1) jedenfalls in der Umgebung von (x,p,μ) mit $\mu_{\varrho'}=0$, (x,p) positiv regulär, nach $p_{(i)}$ bzw. $\mu_{\varrho'}$ auflösen und man erhält

$$p_{(i)}=\varphi_{(i)}(x,P,M),\qquad \mu_{\varrho'}=\psi_{\varrho'}(x,P,M) \tag{6.2}$$

mit

$$c\,p_{(i)}=\varphi_{(i)}(x,c\,P,c\,M),\qquad \mu_{\varrho'}=\psi_{\varrho'}(x,c\,P,c\,M)\quad\text{für } c>0. \tag{6.3}$$

Erklärt man nun noch Funktionen $G(x, P, M)$ und $G_{(i)}(x, P, M)$ mittels

$$G = g(x, \varphi, \psi), \qquad G_{(i)} = \frac{\varphi_{(i)}}{g(x, \varphi, \psi)}, \tag{6.4}$$

so findet man zunächst, daß für $M_{\varrho'} = b_{\varrho'}(p) = 0$ stets $\partial G/\partial P_{(i)} = G_{(i)}$ ist und daß $\partial G/\partial P_{(i)}$ der Grassmannschen Mannigfaltigkeit angehört. In der Tat folgt aus (6.1) und (6.4) $p_{(i)} P_{(i)} = g G$ und nach Differenzieren

$$(dG - G_{(i)} dP_{(i)}) = -(dg - g_{(i)} dp_{(i)}),$$

und wegen $g_{(i)} = \partial g/\partial p_{(i)}$ weiter

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial G}{\partial M_{\varrho'}} dM_{\varrho'} + \left(\frac{\partial G}{\partial P_{(i)}} - G_{(i)}\right) dP_{(i)}\right) = -\left(\frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial g}{\partial \mu_{\varrho'}} d\mu_{\varrho'}\right)$$
$$= -\frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i - b_{\varrho'}(p)\, d\mu_{\varrho'}.$$

Für $b_\varrho(p) = 0$, d.h. auch $M_{\varrho'} = dM_{\varrho'} = 0$ folgt daraus $\frac{\partial G}{\partial x_i} = -\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\frac{\partial G}{\partial P_{(i)}} = G_{(i)}$ und wegen (6.4) gehört mit $p_{(i)}$ auch $\partial G/\partial P_{(i)}$ der Grassmannschen Mannigfaltigkeit an.

Ferner bestätigt man sofort $G(x, cP, cM) = cG(x, P, M)$ und $G_{(i)}(x, cP, cM) = G_{(i)}(x, P, M)$ für $c > 0$, indem man von (6.3) Gebrauch macht.

Setzt man nun $F(x, P) = G(x, P, 0)$, $F_{(i)}(x, P) = G_{(i)}(x, P, 0)$, $F_{x_i} = \frac{\partial G}{\partial x_i}(x, P, 0)$ sowie $f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, so erhält man insgesamt für $\mu_{\varrho'} = b_\varrho(p) = 0$ die Transformation

$$P_{(i)} = f f_{(i)}, \quad F_{(i)} = \frac{p_{(i)}}{f}, \quad F = f, \quad b_\varrho(p) = b_\varrho(P) = 0, \tag{6.5}$$

die sich sofort umkehren läßt[5]):

$$p_{(i)} = F F_{(i)}, \quad f_{(i)} = \frac{P_{(i)}}{F}, \quad f = F, \quad b_\varrho(p) = b_\varrho(P) = 0. \tag{6.6}$$

Diese Transformation liefert also eine im kleinen eineindeutige Zuordnung von Flächenelementen (x, p) und (x, P), und die Funktion $F(x, P)$ besitzt auf $b_\varrho(P) = 0$ folgende Eigenschaften:

$$F(x, cP) = cF(x, P), \quad F_{(i)}(x, cP) = F_{(i)}(x, P) \quad \text{für } c > 0 \tag{6.7}$$

$$\frac{\partial F}{\partial P_{(i)}} = F_{(i)}, \quad F_{x_i} = -f_{x_i}. \tag{6.8}$$

7. *Hamilton-Jacobische Differentialgleichung.* Setzt man $P_{(i)} = f f_{(i)}$ in $F(x, P) = f(x, p)$ ein, so erhält man die Identität $F(x_\iota, f f_{(i)}) = f$ bzw. wegen

[5]) Aus $b_\varrho(P) = 0$ folgt nämlich umgekehrt $\mu_{\varrho'} = 0$: Die $g_{(i)}$ sind Richtungskoordinaten einer Matrix $(\xi_{i\alpha})$. Setzt man $x_{i\alpha} = \partial x_i/\partial t_\alpha$, $g_{x_{i\alpha}} = \partial g/\partial x_{i\alpha}$, $c_{\alpha\beta} = \xi_{i\alpha} x_{i\beta}$, $\bar{c}_{\alpha\beta}$ algebraische Komplement von $c_{\alpha\beta}$ in $(c_{\alpha\beta})$, so erhält man $c_{\alpha\beta} = g_{(i)} p_{(i)}$ sowie $g_{x_{i\alpha}} = g_{(i)}\, \partial p_{(i)}/\partial x_{i\alpha} = \partial |c_{\alpha\beta}|/\partial x_{i\alpha} = \xi_{i\beta} \bar{c}_{\beta\alpha}$, d.h. die Spalten von $(g_{x_{i\alpha}})$ und $(\xi_{i\alpha})$ sind Linearkombinationen voneinander und daher die $g_{(i)}$ (bis auf einen Faktor) zugleich die Richtungskoordinaten von $(g_{x_{i\alpha}})$ und ganz analog $f_{(i)}$ die von $(f_{x_{i\alpha}})$. Aus $f_{x_{i\alpha}} = g_{x_{i\alpha}}$ folgt dann $f_{(i)} = g_{(i)}$ bzw. $\mu_{\varrho'} =$

er Homogenität von $F(x, P)$ in den $P_{(i)}$ die Identität

$$F(x_i, f_{(i)}) = 1.$$

Wenn nun $(x, \pi(x))$ irgendein geodätisches Feld ist, und wenn es Funktionen $S_\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ gibt mit $s_{(i)}(x_i) = f_{(i)}(x, \pi(x))$, dann müssen die $S_\alpha(x_i)$ notwendig der Differentialgleichung

(7.1) $$F(x_i, s_{(i)}) = 1$$

enügen. (7.1) ist daher die *Hamilton-Jacobische Differentialgleichung* unseres Variationsproblems.

Um eine Extremale in ein geodätisches Feld einzubetten, wird man daher von der Differentialgleichung (7.1) ausgehen und eine Lösung $S_\alpha(x_i)$ so zu konstruieren suchen, daß auf der Extremalen $s_{(i)} = f_{(i)}$ gilt. Setzt man dann $P_{(i)} = s_{(i)}(x)$, so liefert (6.6) in eindeutiger Weise ein Feld von Flächenelementen $(x, \pi(x))$ mit $s_{(i)} = f_{(i)}(x, \pi(x))$ [wegen $F(x, s(x)) = f(x, \pi(x)) = 1$], d.h. ein geodätisches Feld, in das die Extremale eingebettet ist. Allerdings muß die Extremale genügend oft stetig differenzierbar sein. Um die Darstellung zu vereinfachen, wird kein Wert darauf gelegt, mit möglichst geringen Voraussetzungen auszukommen.

Zuerst werden Hilfsfunktionen $S_\alpha(x_i)$ konstruiert, für die längs der Extremalen $s_{(i)} = f_{(i)}$ erfüllt ist, so daß sie wenigstens auf der Extremalen der Gl. (7.1) genügen. Dann werden die $S_\alpha(x_i)$ so abgeändert, daß sie auch außerhalb der Extremalen der Differentialgleichung genügen. Dies geschieht mit Hilfe der Charakteristikentheorie.

8. *Beweis der Einbettbarkeit.* Zunächst muß eine Bemerkung über die Richtungskoordinaten senkrechter Flächenelemente vorausgeschickt werden. Wir betrachten im R^n die m-dimensionale Ebene, die von den m Spaltenvektoren η_α der Matrix $(\eta_{i\alpha})$ $(i = 1, \ldots, n;\ \alpha = 1, \ldots, m)$ aufgespannt wird, sowie die dazu senkrechte $(n-m)$-dimensionale Ebene, die durch die Spaltenvektoren ξ_ϱ der Matrix $(\xi_{i\varrho})$ $(\varrho = 1, 2, \ldots, n-m)$ aufgespannt werde. Zwischen den Richtungskoordinaten $f_{i_1 \ldots i_m}$ bzw. $q_{j_1 \ldots j_{n-m}}$ der beiden Matrizen besteht dann der einfache Zusammenhang (s. etwa [*1*]):

Bis auf einen Faktor sind die $q_{j_1 \ldots j_{n-m}}$ gleich ihren algebraischen Komplementen in der Matrix $(\xi_{i\varrho} | \eta_{i\alpha})$ der n Spaltenvektoren $\xi_1, \ldots, \xi_{n-m}, \eta_1, \ldots, \eta_m$. Bezeichnet man mit $[i]$ diejenige Folge, die aus $1, 2, \ldots, n$ durch Streichung von $(i) = i_1, \ldots, i_m$ $(i_1 < i_2 < \cdots < i_m)$ entsteht, so kann man auch kurz schreiben

$$q_{[i]} = k \cdot (-1)^s f_{(i)} \quad \text{mit} \quad s = \sum_{\alpha=1}^{m} i_\alpha + \tfrac{1}{2} m(m+1).$$

Definition. Vermöge $f(x, p)$ kann jedem m-dimensionalen Flächenelement (x, p) ein $(n-m)$-dimensionales Flächenelement (x, q) zugeordnet werden mit

$$q_{[i]} = (-1)^s f_{(i)}(x, p) \quad \left(s = \sum_{\alpha=1}^{m} i_\alpha + \tfrac{1}{2} m(m+1)\right).$$

(x, q) heißt zu (x, p) *transversal.*

Wir betrachten nun die Extremale

$$x_i = x_i(t_1, \ldots, t_m). \tag{8.1}$$

Und zwar nehmen wir an, die Parameter seien bereits so gewählt, daß au der Extremalen

$$f(x(t_\alpha), p(t_\alpha)) = 1 \tag{8.2}$$

gilt[6]). Ferner setzen wir voraus, daß die so vorbereiteten Funktionen (8.1 viermal stetig differenzierbar sind. Dann werden auf der Extremalen di $f_{(i)}(x, p)$ sowie die Richtungskoordinaten $q_{(j)}$ der transversalen Flächenelement dreimal stetig differenzierbare Funktionen der t_α, und es läßt sich auch ein Matrix $(\xi_{i\varrho})$ finden mit ebensooft stetig differenzierbaren Elementen $\xi_{i\varrho}(t_\alpha$ deren Richtungskoordinaten gerade die $q_{(j)}(t_\alpha)$ sind. Durch

$$x_i = \hat{x}_i(t_\alpha, u_\varrho) = x_i(t_\alpha) + \xi_{i\varrho}(t_\alpha)\, u_\varrho \tag{8.3}$$

ist dann eine m-parametrige Schar von $(n-m)$-dimensionalen Ebenen ge geben, deren Richtungskoordinaten gerade die $q_{(j)}$ sind, die also die Extremal $x_i = \hat{x}_i(t_\alpha, 0)$ transversal schneiden. Für die Funktionaldeterminante

$$D = \frac{\partial(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)}{\partial(t_1, \ldots, t_m, u_1, \ldots, u_{n-m})}$$

erhält man auf der Extremalen, wenn i Zeilenindex und α, ϱ Spaltenindize sind,

$$D = \det\left(\frac{\partial x_i}{\partial t_\alpha}\middle|\, \xi_{i\varrho}\right) = p_{(i)} f_{(i)} = f \neq 0. \tag{8.4}$$

Mit anderen Worten: Unter der Voraussetzung $f \neq 0$ haben die Flächenele mente (x, p) und (x, q) keine Richtung gemeinsam, d. h. sie spannen zusamme den vollen Raum auf. Man kann also wegen (8.4) in einer gewissen Um gebung des auf der Extremalen betrachteten Punktes eindeutig nach $t_\varkappa$, u auflösen und erhält (dreimal stetig differenzierbare) Funktionen

$$t_\alpha = S_\alpha(x_1, \ldots, x_n), \quad u_\varrho = U_\varrho(x_1, \ldots, x_n).$$

Die Ebenenschar kann dann in dieser Umgebung auch in der Form

$$S_\alpha(x_1, \ldots, x_n) = t_\alpha \tag{8.5}$$

geschrieben werden, und die $t_\varkappa$-Parameterkurven von (8.1) werden einfach a Durchschnitt der Extremalen (8.1) mit den $m-1$ Hyperflächen

$$S_{\alpha'}(x_1, \ldots, x_n) = \text{const} \quad (\alpha' = 1, 2, \ldots, \alpha-1, \alpha+1, \ldots, m)$$

erhalten.

[6]) Ist zunächst $f(x(t_\alpha), p(t_\alpha)) = \psi(t_\alpha)$, so setze man etwa $t_1^* = \int_0^{t_1} \psi(t_\alpha)\, dt_1$, $t_{\alpha'}^* =$ $(\alpha' = 2, 3, \ldots, m)$.

Die m Vektoren $\left(\frac{\partial S_\alpha}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial S_\alpha}{\partial x_n}\right)$ spannen den zur $(n-m)$-dimensionalen Ebene $S_\alpha(x_1, \ldots, x_n) = \text{const}$ senkrechten Raum auf. Auf der Extremalen müssen daher die Richtungskoordinaten $s_{(i)}$ von $(\partial S_\alpha / \partial x_i)$ bis auf einen Faktor mit den $f_{(i)}$ übereinstimmen. Wegen (8.5) hat man auf (8.1) $\frac{\partial S_\alpha}{\partial t_\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ bzw. $\partial S_\alpha / \partial t_\beta | = s_{(i)} p_{(i)} = 1$. Andererseits ist nach (8.2) auch $f_{(i)} p_{(i)} = 1$, d.h. es ist $s_{(i)} = f_{(i)}$ auf der Extremalen.

Zunächst soll noch eine algebraische Identität hergeleitet werden. Wir setzen $S_{i\alpha} = \partial S_\alpha / \partial x_i$, $x_{i\alpha} = \frac{\partial x_i}{\partial t_\alpha}$ sowie $c_{\beta\gamma} = S_{k\beta} x_{k\gamma}$. $\bar{c}_{\beta\gamma}$ bezeichne das algebraische Komplement von $c_{\beta\gamma}$ in $(c_{\beta\gamma})$. Betrachtet man $S_{i\alpha}$ und $x_{i\alpha}$ als unabhängige Variable, so erhält man, indem man $c_{\beta\gamma} = s_{(i)} p_{(i)}$ nach $S_{i\alpha}$ bzw. $x_{i\alpha}$ differenziert,

$$p_{(i)} \frac{\partial s_{(i)}}{\partial S_{i\alpha}} = x_{i\gamma} \delta_{\alpha\beta} \bar{c}_{\beta\gamma} = x_{i\gamma} \bar{c}_{\alpha\gamma} \quad \text{bzw.} \quad s_{(i)} \frac{\partial p_{(i)}}{\partial x_{i\alpha}} = S_{i\beta} \delta_{\alpha\gamma} \bar{c}_{\beta\gamma} = S_{i\beta} \bar{c}_{\beta a}$$

oder, indem man von (8.5), d.h. $c_{\alpha\beta} = \bar{c}_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ auf (8.1) Gebrauch macht,

$$x_{i\alpha} = p_{(i)} \frac{\partial s_{(i)}}{\partial S_{i\alpha}}, \tag{8.6}$$

$$S_{i\alpha} = s_{(i)} \frac{\partial p_{(i)}}{\partial x_{i\alpha}}. \tag{8.7}$$

Insbesondere folgt aus $f_{x_{i\alpha}} = f_{(i)} \frac{\partial p_{(i)}}{\partial x_{i\alpha}}$ auf (8.1) wegen $s_{(i)} = f_{(i)}$

$$f_{x_{i\alpha}} = S_{i\alpha}. \tag{8.8}$$

Jetzt betrachten wir die Differentialgleichung (7.1). Es ist dies eine einzige Differentialgleichung für m gesuchte Funktionen $S_\alpha(x_i)$. Man kann sich daher $n-1$ der Funktionen willkürlich vorgeben und erhält eine Differentialgleichung für eine gesuchte Funktion. Wir verfügen über diese Willkür, indem wir ein für allemal die (dreimal stetig differenzierbaren) Funktionen $S_{\alpha'}(x_i)$ $(\alpha' = 2, 3, \ldots, m)$ aus (8.5) eintragen und die restliche gesuchte Funktion mit $y = S(x_i)$ bezeichnen. Schreibt man noch $y_i = \partial S / \partial x_i$ so geht (7.1) über in

$$H(x_i, y_i) = 1, \tag{8.9}$$

wobei $H(x_i, y_i)$ nach allen Variablen x_i, y_i mindestens zweimal stetig differenzierbar wird, so daß man auf die Differentialgleichung (8.9) die gewöhnliche Charakteristikentheorie anwenden kann.

Insbesondere machen wir von der Tatsache Gebrauch, daß man die Werte der gesuchten Funktion $y = S(x_i)$ auf einer $(n-1)$-dimensionalen Hyperfläche vorgeben kann. Dazu betrachten wir auf der Extremalen den Punkt $x_i^0 = x_i(t_\alpha^0)$ und geben uns die Hyperfläche durch $x_n = x_n^0$ vor. Die Werte von $y = S(x_1, \ldots, x_n)$ geben wir uns auf dieser Hyperfläche durch $y = S_1(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n^0)$ vor, wobei $S_1(x_1, \ldots, x_n)$ die erste der Funktionen (8.5) ist. Dann hat man $y_{i'} = \frac{\partial S_1}{\partial x_{i'}}(x_1, \ldots, x_n^0)$ $(i' = 1, 2, \ldots, n-1)$, und zur

eindeutigen Berechnung von y_n kann die Differentialgleichung (8.9) dienen falls $\partial H/\partial y_n \neq 0$ ist.

Auf der Extremalen läßt sich eine Lösung sofort angeben, nämlich $y_n = \frac{\partial S_1}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_n^0)$, weil auf der Extremalen $H\left(x_i, \frac{\partial S_1}{\partial x_i}\right) = F(x_i, s_{(i)}) = 1$ ist. Andererseits ist $H(x_i, y_i)$ positiv homogen erster Ordnung in den y_i und daher $H(x_i, y_i) = \frac{\partial H}{\partial y_i} y_i$. Es können daher nicht alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial H}{\partial y_i}$ zugleich verschwinden, weil man sonst $H = 0$ hätte. Man darf annehmen, daß die Bezeichnungsweise so gewählt ist, daß gerade $\partial H/\partial y_n \neq 0$ ist, so daß man eindeutig nach y_n auflösen kann. Auf der Extremalen fällt dann die eindeutig bestimmte Lösung mit $y_i = \frac{\partial S_1}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n^0)$ zusammen.

Mit den so festgelegten Anfangswerten integriere man die charakteristischen Differentialgleichungen

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \dot{y}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \tag{8.10}$$

wobei die Bedingung $\partial H/\partial y_n = \dot{x}_n \neq 0$ geometrisch besagt, daß die Charakteristiken die Fläche $x_n = x_n^0$ durchsetzen ohne sie zu berühren und daher ein gewisses Gebiet des Raumes schlicht überdecken. Das liefert dann auch die Werte der y_i im Raum, und man erhält daraus in bekannter Weise die gesuchte Funktion $y = S(x_1, \ldots, x_n)$.

Damit ist eine Lösung $y = S(x_i)$ der Differentialgleichung (8.9) konstruiert. Der wesentliche Punkt dabei ist, daß die $(n-m)$-Flächen $S(x_i) = \text{const}$, $S_{\alpha'}(x_i) = \text{const}$ $(\alpha' = 2, 3, \ldots, m)$ die Extremale transversal schneiden, d. h. daß ihre Richtungskoordinaten $s_{(i)}^*$ auf der Extremalen $s_{(i)}^* = f_{(i)}$ erfüllen. Um dies zu zeigen, müssen die charakteristischen Differentialgleichungen (8.10) näher betrachtet werden. Ausgeschrieben lauten sie

$$(8.11)_1 \qquad \dot{x}_i = F_{(i)}\left(x_k, y_k \frac{\partial s_{(k)}}{\partial S_{k1}}\right) \cdot \frac{\partial s_{(i)}}{\partial S_{i1}}$$

$$(8.11)_2 \qquad \dot{y}_i = -F_{x_i}\left(x_k, y_k \frac{\partial s_{(k)}}{\partial S_{k1}}\right) - F_{(i)}\left(x_k, y_k \frac{\partial s_{(k)}}{\partial S_{k1}}\right) y_j \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial s_{(i)}}{\partial S_{j1}}\right).$$

Die Lösungskurven des Systems (8.11), im Raum der Variablen x_i, y_i gedeutet, sind durch die obige Wahl der Anfangswerte in ihrem ganzen Verlauf eindeutig festgelegt, weil die rechten Seiten von (8.11) stetig differenzierbare Funktionen von x_i und y_i sind.

Eine $(m-1)$-parametrige Schar von Lösungskurven im R^{2n} läßt sich sogar explizit angeben. Zu diesem Zweck betrachten wir auf (8.1) die $(m-1)$-parametrige Schar der t_1-Parameterkurven: $x_i = x_i(t_1, t_{\alpha'}^0)$ $(\alpha' = 2, 3, \ldots, m)$. Es gilt dann der

Satz 8.1. *Die Kurven der $(m-1)$-parametrigen Schar im R^{2n}*

$$x_i = x_i(t_1, t_{\alpha'}^0), \qquad y_i = \frac{\partial S_1(x(t_1, t_{\alpha'}^0))}{\partial x_i} \tag{8.12}$$

sind Lösungen des Systems (8.11), die obigen Anfangsbedingungen genügen.

Mit anderen Worten: Die t_1-Kurven auf der Extremalen bilden eine Schar von Charakteristiken, von der die Extremale schlicht überdeckt wird, und die Werte der partiellen Ableitungen der konstruierten Lösung $y = S(x_1, \ldots, x_n)$ fallen auf der Extremalen mit $y_i = \frac{\partial S_1}{\partial x_i}$ zusammen, so daß die Richtungskoordinaten $s^*_{(i)}$, gebildet mit den endgültigen Funktionen $S(x_i)$, $S_{\alpha'}(x_i)$ $(\alpha' = 2, 3, \ldots, m)$, auf der Extremalen $s^*_{(i)} = s_{(i)} = f_{(i)}$ erfüllen. Die Legendresche Transformation liefert dann wie in Nr. 7 ausgeführt das zugehörige geodätische Feld, in das die Extremale eingebettet ist.

Zum Beweis von Satz 8.1 hat man also zu zeigen, daß die Gln. (8.11) durch (8.12) identisch erfüllt werden. Setzt man zunächst (8.12) in $(8.11)_1$ ein, so erhält man wegen $s_{(i)} = f_{(i)}(x, p)$ bzw. $F_{(i)}(x, s) = p_{(i)}$ auf der Extremalen

$$\dot{x}_i = x_{i1} = F_{(i)}(x, s) \frac{\partial s_{(i)}}{\partial s_{i1}} = p_{(i)} \frac{\partial s_{(i)}}{\partial s_{i1}}.$$

Dies ist nach (8.6) in der Tat eine Identität.

Setzt man nun (8.12) in $(8.11)_2$ ein, so erhält man

$$\frac{\partial S_{i1}}{\partial t_1} = -F_{x_i}(x, s) - F_{(i)}(x, s)\, S_{k1} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial s_{(i)}}{\partial S_{k1}}\right). \tag{8.13}$$

Andererseits ist

$$\frac{\partial S_{i1}}{\partial t_1} = \frac{\partial S_{i1}}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial t_1} = \frac{\partial S_{i1}}{\partial x_k}\frac{\partial s_{(i)}}{\partial S_{k1}} F_{(i)}(x, s). \tag{8.14}$$

Es genügt also zu zeigen, daß die Differenz D_i von (8.13) und (8.14), nämlich

$$D_i = F_{x_i}(x, s) + F_{(i)}(x, s)\left\{\frac{\partial S_{i1}}{\partial x_k}\frac{\partial s_{(i)}}{\partial S_{k1}} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial s_{(i)}}{\partial S_{k1}}\right) S_{k1}\right\}$$

null ist. Da $S_1(x_i)$ zweimal stetig differenzierbar ist, hat man

$$\frac{\partial S_{k1}}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 S_1}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial S_{i1}}{\partial x_k}.$$

Das ergibt

$$D_i = F_{x_i}(x, s) + F_{(i)}(x, s)\left\{\frac{\partial S_{k1}}{\partial x_i}\frac{\partial s_{(i)}}{\partial S_{k1}} + S_{k1}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial s_{(i)}}{\partial S_{k1}}\right)\right\} = F_{x_i} + F_{(i)} \cdot \frac{\partial s_{(i)}}{\partial x_i}.$$

Auf der Extremalen hat man aber nach (8.8) $S_{i\alpha} = f_{x_i\alpha}$ und daher

$$\frac{df_{x_i\alpha}}{dt_\alpha} = \frac{dS_{i\alpha}}{dt_\alpha}\frac{\partial^2 S_\alpha}{\partial x_i \partial x_k} \cdot \frac{\partial s_{(i)}}{\partial S_{k\alpha}} F_{(i)}(x, s) = F_{(i)} \cdot \frac{\partial s_{(i)}}{\partial x_i}.$$

Andererseits liefert die Legendresche Transformation nach (8.6) $F_{x_i}(x, s) = -f_{x_i}(x, p)$, d.h.

$$D_i = \frac{df_{x_i\alpha}}{dt_\alpha} - f_{x_i} = 0,$$

da die Fläche nach Voraussetzung Extremale ist, also den Eulerschen Differentialgleichungen genügt.

9. *Beweis des Kneserschen Satzes.* Wir betrachten die $p_{(i)}$ jetzt durchweg auf der Grassmannschen Mannigfaltigkeit $b_\varrho(p) = 0$, so daß sie stets als Richtungskoordinaten einer Matrix $(x_{i\alpha})$ angesehen werden können. Ist dann $p = p(t)$ eine stetig differenzierbare Kurve auf der Grassmannschen Mannigfaltigkeit, so lassen sich (vgl. Anmerkung in Nr. 1) stets auch stetig differenzierbare $x_{i\alpha}(t)$ angeben, so daß die $p_{(i)}(t)$ die Richtungskoordinaten von $(x_{i\alpha}(t))$ sind. Differenzieren längs der Kurve liefert

$$\frac{dp_{(i)}}{dt} = \frac{\partial p_{(i)}}{\partial x_{i\alpha}} \frac{dx_{i\alpha}}{dt} \qquad \text{oder kurz} \qquad dp_{(i)} = \frac{\partial p_{(i)}}{\partial x_{i\alpha}} dx_{i\alpha}.$$

Schreibt man wieder $f_{x_{i\alpha}} = \frac{\partial f}{\partial x_{i\alpha}}$ und bezeichnet die Richtungskoordinaten von $(f_{x_{i\alpha}})$ mit $u_{(i)}$, so erhält man zunächst

$$D = |f_{x_{i\alpha}} x_{i\beta}| = v_{(i)} p_{(i)}. \tag{9.1}$$

Andererseits hat man wegen $f_{x_{i\alpha}} = f_{(i)} \frac{\partial p_{(i)}}{\partial x_{i\alpha}}$ stets $f_{x_{i\alpha}} x_{i\beta} = f \delta_{\alpha\beta}$ d. h. $D = f^m$ oder

$$\frac{v_{(i)}}{f^{m-1}} p_{(i)} = f_{(i)} p_{(i)}. \tag{9.2}$$

Weiter ist

$$v_{(i)} dp_{(i)} = v_{(i)} \frac{\partial p_{(i)}}{\partial x_{i\alpha}} dx_{i\alpha},$$

wobei z. B. $\frac{\partial p_{(i)}}{\partial x_{i1}} dx_{i1}$ die Richtungskoordinaten der Matrix

$$(d\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_m)$$

sind, in der die $\mathfrak{x}_\alpha$ die Spaltenvektoren der Matrix $(x_{i\alpha})$ bezeichnen. Um dann den Term $v_{(i)} \frac{\partial p_{(i)}}{\partial x_{i1}} dx_{i1}$ zu berechnen, ersetze man einfach in (9.1) den Spaltenvektor $\mathfrak{x}_1$ durch $d\mathfrak{x}_1$. Das ergibt

$$v_{(i)} \frac{\partial p_{(i)}}{\partial x_{i1}} dx_{i1} = \begin{vmatrix} f_{x_{i1}} dx_{i1} & 0 \cdots 0 \\ * & f \quad 0 \\ \vdots & \ddots \\ * & 0 \quad f \end{vmatrix} = f^{m-1} f_{x_{i1}} dx_{i1},$$

insgesamt also

$$v_{(i)} dp_{(i)} = f^{m-1} f_{x_{i\alpha}} dx_{i\alpha} = f^{m-1} f_{(i)} \frac{\partial p_{(i)}}{\partial x_{i\alpha}} dx_{i\alpha} = f^{m-1} f_{(i)} dp_{(i)}$$

oder

$$\frac{v_{(i)}}{f^{m-1}} dp_{(i)} = f_{(i)} dp_{(i)}. \tag{9.3}$$

Jetzt betrachten wir die beiden Determinanten

$$v_{(i)} = |f_{x_{i_\nu\alpha}}|, \qquad p_{(k)} = |x_{k_\nu\alpha}|$$

und bilden ihr Produkt

$$v_{(i)} p_{(k)} = |f_{x_{i_\nu\alpha}} x_{k_\nu\alpha}| = \left| f_{(j)} \frac{\partial p_{(j)}}{\partial x_{i_\nu\alpha}} x_{k_\nu\alpha} \right|.$$

Hierin ist $\frac{\partial p_{(j)}}{\partial x_{i_\nu \alpha}} x_{k_\nu \alpha}$ wieder eine aus m Zeilen der Matrix $(x_{i\alpha})$ gebildete Determinante, d.h. $v_{(i)} p_{(k)}$ kann als Funktion der x_i, $p_{(i)}$ geschrieben werden, was wir durch Klammersetzung andeuten

$$w_{(i)(k)}(x, p) = [v_{(i)} p_{(k)}].$$

(Dieser Ausdruck hat auch dann einen Sinn, wenn die $p_{(i)}$ nicht der Grassmannschen Mannigfaltigkeit angehören.)

Erklärt man nun die Größen des Kneserschen Satzes mittels

$$u_{(i)}(x, p) = \frac{[v_{(i)} p_{(k)}] p_{(k)}}{f^{m-1} p_{(j)} (p_j)},$$

so erhält man, wenn man für die $p_{(i)}$ die Richtungskoordinaten der Matrix $(x_{i\alpha})$ einträgt,

$$u_{(i)} = \frac{\tau_{(i)}}{f^{m-1}}$$

und daher wegen (9.2) und (9.3) auch

$$u_{(i)} p_{(i)} = f_{(i)} p_{(i)}, \quad u_{(i)} dp_{(i)} = f_{(i)} dp_{(i)}, \quad b_\varrho(u_{(i)}) = 0 \quad \text{auf} \quad b_\varrho(p) = 0.$$

Außerdem bestätigt man sofort die in Satz 4.1 genannten Homogenitäts- und Differenzierbarkeitseigenschaften.

Literatur.

[1] Bertini-Duschek: Einführung in die projektive Geometrie mehrdimensionaler Räume. 1924. — [2] Boerner, H.: Über die Extremalen und geodätischen Felder in der Variationsrechnung der mehrfachen Integrale. Math Ann. **112**, 187—220 (1936). — [3] Boerner, H.: Über die Legendresche Bedingung und die Feldtheorien in der Variationsrechnung mehrfacher Integrale. Math. Z. **46**, 720—742 (1940). — [4] Boerner, H.: Carathéodorys Eingang zur Variationsrechnung. Jber. dtsch. Math.-Ver. **56**, 31—58 (1953). — [5] Carathéodory, C.: Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung. Leipzig 1935. — [6] Carathéodory, C.: Über die Variationsrechnung bei mehrfachen Integralen. Acta Szeged **4**, 193—216 (1929). — [7] Debever, R.: Sur quelques problèmes de géométries dérivées du calcul des variations. Bull. Acad. Roy. Belg. **28**, 794—808 (1942). — [8] Gross, W.: Das isoperimetrische Problem bei Doppelintegralen. Mh. Math. u. Phys. **27**, 70—120 (1916). — [9] Haar, A.: Über adjungierte Variationsprobleme und adjungierte Extremalflächen. Math. Ann. **100**, 481—502 (1928). — [10] Hölder, E.: Die infinitesimalen Transformationen der Variationsrechnung. Jber. dtsch. Math.-Ver. **49**, 162—178 (1939). — [11] Kneser, H.: Homogene Funktionen auf der Grassmannschen Mannigfaltigkeit. Bull. Soc. Math. Grèce **20**, 101—103 (1940). — [12] Lepage, Th.-H.-J.: Sur les champs géodésiques du calcul des variations. Bull. Acad. Roy. Belg. **22**, 716—729, 1036—1046 (1936). — [13] Paquet, P. V.: Sur la géométrie différentielle suivant la méthode de Grassmann et les intégrales du calcul des variations. Bull. Acad. Roy Belg. **27**, 148—168 (1941). — [14] Radon, J.: Über einige Fragen betreffend die Theorie der Maxima und Minima mehrfacher Integrale. Mh. Math. u. Phys. **22**, 53—63 (1911). — [15] Velte, W.: Zur Variationsrechnung mehrfacher Integrale in Parameterdarstellung. Mitt. math. Sem. Gießen **1953**, H. 45. — [16] Weyl, H.: Geodesic fields. Ann. of Math. **36**, 607—629 (1935).

Gießen, Mathematisches Seminar der Justus-Liebig-Hochschule.

(Eingegangen am 1. April 1954.)

Klingenberg, W.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 384—406 (1954)

Projektive und affine Ebenen mit Nachbarelementen.

Von
Wilhelm Klingenberg.

Wir betrachten ein Axiomensystem für eine Ebene von projektivem Typus, in welchem nicht die Eindeutigkeitsforderung für die Verbindungsgerade und den Schnittpunkt erhoben wird. Diese Modifikation der Inzidenzaxiome ist nicht nur vom formalen Standpunkt aus jedenfalls zulässig, sondern sie trägt, wenn wir an die in einer Zeichenebene auftretenden „schleifenden Schnitte" denken, auch eine gewisse natürliche Motivierung[1]) in sich, wie sie von einem geometrischen Axiomensystem immer zu fordern ist.

Wir nennen zwei Punkte oder zwei Geraden benachbart, wenn sie mehr als eine Verbindungsgerade oder mehr als einen Schnittpunkt haben. In der gewöhnlichen projektiven Ebene ist offenbar jeder Punkt und jede Gerade nur zu sich selber benachbart, d.h.: Bei der Gültigkeit der in Rede stehenden Eindeutigkeitsforderungen wird die Nachbarrelation zur Gleichheitsrelation.

Unser Axiomensystem umfaßt als erste Gruppe eine Reihe von Inzidenzaxiomen, die außer den üblichen Forderungen der Existenz von Schnittpunkt und Verbindungsgerade und der Existenz von vier Punkten in hinreichend allgemeiner Lage drei Axiome über Nachbargeraden und Nachbarpunkte enthalten, die in einer Ebene mit Eindeutigkeitsaxiom trivialerweise erfüllt sind. Wir zeigen, daß durch diese Axiomgruppe eine in sich duale Inzidenzebene ε_p von projektivem Typus definiert ist mit der fundamentalen Eigenschaft, daß die Nachbarrelation klassenbildend ist. Die Zusammenfassung der Klassen benachbarter Punkte und Geraden zu Großpunkten und Großgeraden liefert eine der üblichen projektiven Inzidenzebenen $\bar{\varepsilon}_p$ [2]), in

[1]) J. Hjelmslev hat versucht, eine „Geometrie der Wirklichkeit" zu begründen. Ein mathematisches Modell für das Verhalten von „wirklichen Geraden" und „wirklichen Punkten" gegenüber dem Schneiden und Verbinden glaubt er, jedenfalls in einem gewissen Maße, in der ebenen Geometrie über den dualen Zahlen zu finden; s. J. Hjelmslev, Die natürliche Geometrie. Leipzig 1923.

Eine mathematisch präzise Fassung erhält das Problem, wenn man es als die Frage nach den Konsequenzen einer Einschränkung der Gültigkeit der Eindeutigkeitsforderung von Schnittpunkt und Verbindungsgerade in den Axiomen der Geometrie formuliert. Dazu finden sich, für die euklidische Ebene im wesentlichen, eine Reihe von Untersuchungen und Resultaten in J. Hjelmslev, Einleitung in die allgemeine Kongruenzlehre, 1. Mitt. Danske Vid. Selsk., mat.-fys. Medd. **8** (1929); 2. Mitt. **10** (1929); 3. Mitt. **19** (1942); 4. u. 5. Mitt. **22** (1945); 6. Mitt. **25** (1949).

[2]) Bei M. Hall, Projektive planes, Trans. Amer. Math. Soc. **54**, 229—277 (1943) heißt $\bar{\varepsilon}_p$ „free projektive plane". In W. Klingenberg, Beziehungen zwischen einigen affinen Schließungssätzen, Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **18**, 120—143 (1952), nennen wir $\bar{\varepsilon}_p$ „projektive Inzidenzebene" und schreiben dafür ε_p, da wir in jener Arbeit stets die Eindeutigkeitsforderung erheben. Entsprechend nennen wir dort $\bar{\varepsilon}_a$ einfach „affine Inzidenzebene" und schreiben dafür ε_a.

denen das Eindeutigkeitsaxiom gilt. Es gibt also einen Homomorphismus von ε_p in eine eindeutige projektive Ebene.

Durch die Herausnahme einer Geraden g_∞^* und aller zu g_∞^* benachbarten Geraden g_∞ sowie aller mit diesen Geraden inzidierenden Punkte aus ε_p erhalten wir eine affine Inzidenzebene ε_a mit Nachbarelementen. In ε_a ist mit Hilfe der ausgezeichneten uneigentlichen Geraden g_∞^* in der üblichen Weise ein transitiver Parallelitätsbegriff erklärt, und es gibt zu einer Geraden durch einen Punkt genau eine Parallele. Jedoch wird es im allgemeinen zu einer Geraden durch einen nicht auf ihr gelegenen Punkt außer der Parallelen weitere Nichtschneidende geben; dies mag man in Beziehung setzen zu dem Auftreten von Schnittpunkten außerhalb einer beschränkten Zeichenebene. Schneidet jedoch eine Gerade h die Gerade g eindeutig, so schneidet h auch alle Parallelen von g.

Die zweite Axiomgruppe besteht in der Forderung, daß gewisse Schnittpunktsätze (nach D. Hilbert) oder Schließungssätze (nach K. Reidemeister) gültig sein sollen. Jedem Schnittpunktsatz Σ in ε_p ist beim Übergang zur Großgeometrie ein Schnittpunktsatz $\bar{\Sigma}$ in $\bar{\varepsilon}_p$ zugeordnet. Dabei kann Σ so beschaffen sein, daß der zugehörige Schließungssatz $\bar{\Sigma}$ in der eindeutigen projektiven Inzidenzebene $\bar{\varepsilon}_p$ trivial wird, d.h. eine Folge der in $\bar{\varepsilon}_p$ geltenden eindeutigen Inzidenzaxiome ist. Hierauf beruht es, daß man die bekannten Abhängigkeitsbeweise von Schließungssätzen in eindeutigen projektiven Ebenen nicht ohne weiteres zu Abhängigkeitsbeweisen in einer allgemeinen Ebene ε_p mit Nachbarelementen ausgestalten kann: Bei den Abhängigkeitsbeweisen in eindeutigen projektiven Ebenen wird eben im allgemeinen das Eindeutigkeitsaxiom für Schnittpunkt und Verbindungsgerade wesentlich benutzt. So müssen wir z.B. die Frage offenlassen, ob aus der Gültigkeit des Satzes von Pappos-Pascal in ε_p schon die Gültigkeit aller Schließungssätze, insbesondere etwa des Satzes von Desargues, folgt — eine Frage, die für eindeutige projektive Ebenen $\bar{\varepsilon}_p$ bekanntlich positiv entschieden ist[3]).

Wir können jedoch zeigen, daß folgende Schließungssätze alle übrigen zur Folge haben, was im Hinblick auf eine spätere Anwendung wichtig ist: Wir gehen dazu von ε_p zu einer affinen Ebene ε_a mit Nachbarelementen über. In ε_a setzen wir die Gültigkeit des kleinen (affinen) Satzes von Desargues allgemein und des affinen Satzes von Pappos-Pascal mit der Beschränkung auf ein festes, sich eindeutig schneidendes Paar von Trägergeraden g und g' voraus. Diese Voraussetzungen kommen einer bequemen Einführung einer nach dem Hilbertschen Vorbild erklärten Streckenrechnung[4]) entgegen: Wir wählen nämlich g und g' als Achsen eines Koordinatensystems und zeigen, daß auf Grund der vorausgesetzten Schließungssätze die Strecken unter der Addition und Multiplikation einen Hjelmslevschen Ring oder H-Ring bilden.

Dabei ist ein H-Ring ein kommutativer Ring mit Einselement, in dem jeder Nichtnullteiler invertierbar ist und von zwei Nullteilern wenigstens einer

[3]) Hilbert, D.: Grundlagen der Geometrie, 7. Aufl. Leipzig u. Berlin 1930.

[4]) Vgl. D. Hilbert[3]). Wir schließen uns eng an die Darstellung der affinen Streckenrechnung an, wie sie sich bei W. Klingenberg[2]) findet.

den anderen teilt. Speziell ist also ein Körper ein H-Ring. Die Ebene ε_a und die zugehörige Ebene ε_p lassen sich nunmehr in der üblichen Weise als affine und projektive Geometrie über einem H-Ring beschreiben. Der Verallgemeinerung gegenüber einer affinen oder projektiven Geometrie über einem Körper besteht darin, daß an die Stelle der Bedingung „nicht Null" bei einem Körper die Bedingung „nicht Nullteiler" bei einem H-Ring tritt. So ist z.B. eine Gerade in ε_p festgelegt durch ein homogenes (d.h. ein bis auf einen gemeinsamen Faktor, der nicht Nullteiler ist, festgelegtes) geordnetes Elementtripel, bei dem nicht alle Elemente Nullteiler sind.

Das Auftreten von Nullteilern in einem H-Ring entspricht dem Auftreten von Nachbarelementen in ε_p oder ε_a. So sind z.B. in einer Ebene ε_p, die sich als projektive Geometrie über einem H-Ring beschreiben läßt, zwei Geraden oder zwei Punkte genau dann benachbart, wenn die durch die beiden Koordinatentripel bestimmten drei zweireihigen Determinanten Nullteiler sind. Die Nullteiler in einem H-Ring $\boldsymbol{R}_H$ bilden ein teilerloses Ideal $\boldsymbol{N}$. Der Restklassenring $\boldsymbol{R}_H/\boldsymbol{N}$ ist isomorph zum Koordinatenkörper der zugehörigen Großgeometrie.

Umgekehrt genügt eine projektive Geometrie über einem H-Ring $\boldsymbol{R}_H$ unseren Inzidenzaxiomen und es gelten — in geeigneter Formulierung — alle die Schließungssätze, die auch in einer projektiven Ebene über einem Körper gelten. Insbesondere folgen also aus den oben angegebenen beiden Schließungssätzen alle anderen in jeder Körpergeometrie gültigen Schließungssätze. Die Konstruktion des H-Ringes $\boldsymbol{R}_H$ mit Hilfe der Streckenrechnung in einem bestimmten Bezugssystem, wie wir sie oben beschrieben haben, erweist sich jetzt als unabhängig von diesem Bezugssystem insofern, als daß jedes andere Bezugssystem einen zu $\boldsymbol{R}_H$ isomorphen H-Ring liefert.

Damit haben wir also die projektiven und affinen Ebenen ε_p und ε_a mit Nachbarelementen, in denen die oben angegebenen Schließungssätze gelten, als projektive und affine Geometrien über H-Ringen charakterisiert.

In den H-Ringen haben wir eine solche Klasse von Ringen vor uns, bei denen die zugehörigen projektiven und affinen Ebenen trotz der möglichen Mehrdeutigkeit von Schnittpunkt und Verbindungsgerade noch viele wichtige Eigenschaften der Körpergeometrien gelten. Man kann zeigen, daß über Ringen, die allgemeiner sind als H-Ringe, nicht mehr stets die Verbindungsgerade in der zugehörigen Geometrie existiert.

Bemerkenswert ist noch, daß die H-Ringe in engem Zusammenhang mit den allgemeinen Bewertungsringen zu stehen scheinen[5]). Jedenfalls lassen sich alle bekannten H-Ringe als Restklassenringe von Bewertungsringen darstellen: Sei $\boldsymbol{B}$ ein Bewertungsring (das ist ein Integritätsbereich mit Einselement, in dem von je zwei Elementen wenigstens eines Teiler des anderen ist) und $\boldsymbol{P}$ das Ideal der Nichteinheiten von $\boldsymbol{B}$. Ist $\boldsymbol{A}$ ein Ideal in $\boldsymbol{P}$, so ist $\boldsymbol{B}/\boldsymbol{A}$ dann und nur dann H-Ring, wenn es nicht ein Primideal $\boldsymbol{Q}$ gibt mit $\boldsymbol{A} \subseteqq \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{P}$.

[5]) Über Bewertungsringe und damit zusammenhängende Begriffe vgl. W. KRULL, Idealtheorie. Berlin 1935.

Diese Bedingung ist z.B. erfüllt, wenn $\mathfrak{A} = (a) \neq (0)$ ein Hauptideal ist. Hier ordnen sich insbesondere die von J. Hjelmslev angegebenen Verallgemeinerungen der dualen Zahlen unter: Man erhält sie als Restklassenring $\boldsymbol{K}[x]/(x)^n$, wo $\boldsymbol{K}[x]$ der Polynomring in einer Unbestimmten x über einem Körper $\boldsymbol{K}$ ist.

Es ist eine offene Frage, ob jeder H-Ring sich in der angegebenen Weise als Restklassenring eines Bewertungsringes darstellen läßt.

Ebenso, wie bei einer projektiven Ebene über einem Körper kann man für eine projektive Ebene über einem H-Ring durch Einführung von absoluten quadratischen Gebilden zu Ebenen von euklidischem und nichteuklidischem Typus gelangen, in denen die Eindeutigkeit für Schnittpunkt und Verbindungsgerade nicht gefordert sind. Doch kann man auch auf einem ganz anderen Wege etwa zu einer euklidischen Ebene mit Nachbarelementen gelangen: Die von Hjelmslev begründete Spiegelungsgeometrie gibt uns die Möglichkeit hierzu.

J. Hjelmslev[1]) war überhaupt der erste, der ebene euklidische und nichteuklidische Geometrien ohne Eindeutigkeitsforderungen genauer studiert hat, und zwar mit der Methode des Rechnens mit Geraden- und Punktspiegelungen, also den involutorischen Elementen der zugehörigen Bewegungsgruppe. Die Beschäftigung mit den Hjelmslevschen Untersuchungen veranlaßte uns, zunächst einmal projektive und affine Ebenen mit Nachbarelementen zu untersuchen. In einer folgenden Note werden wir dann, gerüstet mit den hier gewonnenen Ergebnissen, auf die euklidische Geometrie mit Nachbarelementen mit den Methoden des Spiegelungskalküls eingehen[6]).

I. Projektive Ebenen mit Nachbarelementen.

1.1. Die Inzidenzaxiome.

D 0. Unter einer *projektiven Inzidenzebene ε_p mit Nachbarelementen* verstehen wir eine Menge von Punkten $P, Q, R, \ldots$, in der gewisse Teilmengen, genannt Geraden $g, h, j, \ldots$, ausgezeichnet sind. Für $P \in g$ schreiben wir $P \mathrel{I} g$ oder $g \mathrel{I} P$ und nennen dann P und g auch inzident. Die Negation bezeichnen wir mit $P \mathrel{\not I} g$ oder $g \mathrel{\not I} P$. Für Punktepaare und Geradenpaare erklären wir die Relation „benachbart" folgendermaßen:

D 1. P und Q heißen *benachbart*, $P \bigcirc Q$, wenn es g und h gibt mit $g \neq h$; $g, h \mathrel{I} P, Q$. Sind P und Q nicht benachbart, $P \varnothing Q$, so heißen P und Q auch *fern*.

D 2. g und h heißen *benachbart*, $g \bigcirc h$, wenn es P und Q gibt mit $P \neq Q$; $P, Q \mathrel{I} g, h$. Sind g und h nicht benachbart, $g \varnothing h$, so heißen g und h auch *kreuzend*.

Hiermit formulieren wir als Axiome für ε_p[7]):

A 1. Zu $P; Q$ gibt es g mit $g \mathrel{I} P, Q$. (Wir schreiben für ein g mit $g \mathrel{I} P, Q$ auch PQ. PQ heißt Verbindungsgerade von P und Q.)

---

[6]) Euklidische Ebenen mit Nachbarelementen; erscheint in dieser Zeitschrift Bd. 60.

[7]) Vgl. J. Hjelmslev[1]), insbesondere die 3. Mitteilung.

A 2. Zu $g; h$ gibt es P mit $P \mathrel{I} g, h$. (Wir schreiben für ein P mit $P \mathrel{I} g, h$ auch $g\,h$. $g\,h$ heißt Schnittpunkt von g und h.)

A 3. Es gibt vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 mit $P_i \varnothing P_k$ $(i \neq k)$ und $P_i P_k \varnothing P_l P_m$ $(i \neq k, l;\ k \neq l)$, $(i, k, l = 1, 2, 3, 4)$.

A 4. Aus $g, h, j \mathrel{I} P$; $g \varnothing h$; $h \bigcirc j$ folgt $g \varnothing j$.

A 5. Aus $g \bigcirc h$; $j \varnothing g$ folgt $g\,j \bigcirc h\,j$ [8]).

A 6. Aus $P \bigcirc Q$; $Q \varnothing R$ folgt $PR \bigcirc QR$ [8]).

1.2. Bemerkungen. Inhaltlich besagen die Axiome folgendes: A 1 und A 2 bedeuten die Existenz der Verbindungsgeraden und des Schnittpunktes. A 3 besagt die Existenz von vier Punkten in allgemeiner Lage, nämlich so, daß sie zu je zweien fern sind und daß ihre von einem Punkt auslaufenden verschiedenen Verbindungsgeraden kreuzend sind. A 4 fordert, daß eine Gerade j, die durch den Schnittpunkt zweier Kreuzgeraden $g; h$ läuft, höchstens zu einer der Geraden $g; h$ benachbart sein kann. Anders ausgedrückt: Die Nachbarrelation für die Geraden eines Büschels ist transitiv. A 5 besagt, daß zwei Nachbargeraden $g; h$ von einer Kreuzgeraden j zu g in Nachbarpunkten geschnitten werden. A 6 fordert, dual hierzu, daß die Verbindungsgeraden zweier Nachbarpunkte $P; Q$ mit einem Fernpunkt R von P benachbart sind.

Gegenüber den üblichen projektiven Inzidenzaxiomen fehlt in unserem Axiomensystem die Forderung der Eindeutigkeit der Verbindungsgeraden zweier verschiedener Punkte. Wir können dies ausdrücken durch

$\overline{A}\,4.$ Aus $P \bigcirc Q$ folgt $P = Q$.

S 1.1. Wenn $\overline{A}\,4$ gilt, so gilt auch: Aus $g \bigcirc h$ folgt $g = h$.

Denn die Gültigkeit von $g \bigcirc h$ und $g \neq h$ würde nach D 2 die Existenz von $P; Q$ mit $P \bigcirc Q$; $P \neq Q$ bedeuten, entgegen $\overline{A}\,4$.

D 3. Gilt in ε_p $\overline{A}\,4$, so heißt ε_p *(eindeutige) projektive Inzidenzebene* $\overline{\varepsilon}_p$.

S 1.2. In $\overline{\varepsilon}_p$ sind A 4; A 5; A 6 triviale Folgen aus der Gleichheitsrelation, in die die Nachbarschaftsrelation entartet ist. $\overline{\varepsilon}_p$ ist also schon durch die Axiome A 1; A 2; A 3; $\overline{A}\,4$ definiert.

Das folgt unmittelbar aus $\overline{A}\,4$ und S 1.1.

1.3. Folgerungen aus A 1 bis A 6.

S 1.3. Auf den nach A 3; A 1 existierenden Geraden $P_i P_k$ gibt es die Punkte $Q_{ik} = Q_{ki} = (P_i P_k)\,(P_l P_m)$ mit $Q_{ik} \varnothing P_l, P_k$ $(i, k, l, m$ eine Permutation von 1, 2, 3, 4).

Es genügt, dies etwa für $i = 1; k = 2$ nachzuweisen: Nach A 2 gibt es den Schnittpunkt $Q_{12} = (P_1 P_2)\,(P_3 P_4)$. Wäre $Q_{12} \bigcirc P_1$, so würde wegen $P_1 \varnothing P_3$ aus A 6 folgen: $(P_1 P_3) \bigcirc (P_3 P_4)$, entgegen A 3. Ebenso folgt $Q_{12} \varnothing P_2$.

S 1.4. Es seien $P_i; P_k; P_l$ drei verschiedene Punkte aus A 3. Dann gilt für ein beliebiges P^* von ε_p: $P^* P_i \varnothing P^* P_k$ oder $P^* P_i \varnothing P^* P_l$.

[8]) Durch Übergang zu einer Kontraposition lassen sich A 5 und A 6 auch in symmetrischer Form formulieren. So kann man etwa an Stelle von A 5 schreiben: Aus $g \bigcirc h$; $g\,j \varnothing h\,j$ folgt $j \bigcirc g$; $j \bigcirc h$.

Denn wegen $P_k P_i \varnothing P_k P_l$ gilt nach A3 entweder $P_l P_i \varnothing P_k P^*$ oder $P_k P_l \varnothing P_k P^*$. Sei etwa $P_k P_i \varnothing P_k P^*$. Wäre $P^* P_i \bigcirc P^* P_k$, so würde aus A5 $P_i \bigcirc P_k$ folgen, entgegen A3; also gilt $P^* P_i \varnothing P^* P_k$.

S1.5. Zu P^* gibt es $g; h; j$ mit $g, h, j \mathrel{I} P^*$; $g \varnothing h; h \varnothing j; j \varnothing g$. (Die Existenz von drei Kreuzgeraden durch jeden Punkt.)

Beweis (Fig. 1). Nach S1.4 können wir etwa $P^* P_1 \varnothing P^* P_2$ annehmen. Gilt dann noch $P^* P_1 \varnothing P^* P_3$; $P^* P_2 \varnothing P^* P_3$, dann genügen $P^* P_1$; $P^* P_2$; $P^* P_3$ unseren Forderungen. Sei jetzt etwa $P^* P_2 \bigcirc P^* P_3$. Dann gilt nach A4: $P^* P_1 \varnothing P^* P_3$. Ferner gilt $P_2 P^* \bigcirc P_2 P_3$; $P_3 P^* \bigcirc P_3 P_2$, denn andernfalls würde mit $P^* P_2 \bigcirc P^* P_3$ aus A5 folgen: $P_2 \bigcirc P_3$. Wegen $P_2 P_1 \varnothing P_2 P_3$ folgt mit $P_2 P^* \bigcirc P_2 P_3$ nach A4: $P_2 P^* \varnothing P_2 P_1$. Ebenso folgt $P_3 P^* \varnothing P_3 P_1$. Schließlich können wir annehmen, daß etwa $P_1 P^* \varnothing P_1 P_3$ gilt (sonst gilt jedenfalls $P_1 P^* \varnothing P_1 P_2$, womit man ebenso weiterschließen kann). Damit sind $P_1 P^*$; $P^* P_3$; $P_3 P_1$ paarweise Kreuzgeraden. Es gilt also $P^* \varnothing P_1, P_3$. Denn wäre etwa $P^* \bigcirc P_1$, so würde aus A6 mit $P_1 \varnothing P_3$ folgen: $P_3 P_1 \bigcirc P_3 P^*$. Ebenso folgt $P^* \varnothing P_3$. Wir zeigen, daß für den nach S1.3 existierenden Punkt $Q = Q_{13}$ gilt: $P^* Q_{13} \varnothing P^* P_1, P^* P_3$. Dann genügen also $P^* P_1$; $P^* P_3$; $P^* Q_{13}$ unseren Forderungen. Wäre nun etwa $P^* Q_{13} \bigcirc P^* P_1$, so würde wegen $P_1 P^* \varnothing P_1 P_3 = P_1 Q_{13}$ mit A5 folgen: $P_1 \bigcirc Q_{13}$, entgegen S1.3.

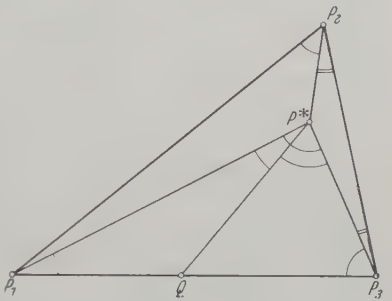

Fig. 1.

S1.6. Zu $P; R$ mit $P \varnothing R$ gibt es S mit $S \varnothing P, R$; $SP \varnothing SR$.

Denn es gibt PR. Von den nach S1.5 existierenden Geraden durch P gilt wenigstens für eine, etwa für g: $g \mathrel{I} P$; $g \varnothing PR$. Ebenso gibt es g' mit $g' \mathrel{I} R$; $g' \varnothing RP$. Für $S = g\,g'$ gilt nach A6: $S \varnothing P, R$ und nach A5: $g \varnothing g'$.

S1.7. Aus $P \bigcirc Q$; $Q \bigcirc R$ folgt $P \bigcirc R$. (Transitivität der Nachbarrelation für Punkte.)

Wir beweisen die Kontraposition: Aus $P \varnothing R$ folgt $Q \varnothing P$ oder $Q \varnothing R$. Es gibt nämlich S mit der in S1.6 angegebenen Eigenschaft. Für SQ gilt nach A4 entweder $SQ \varnothing SP$ oder $SQ \varnothing SR$. Sei etwa $SQ \varnothing SP$. Dann gilt mit A6 und $P \varnothing S$: $P \varnothing Q$.

S1.8. Aus A1 bis A6 folgen die zu A1 bis A6 dualen Aussagen[9]).

Denn A1; A2 und A5; A6 sind bereits zueinander dual. Ein duales Gegenstück zu den vier Punkten aus A3 bilden die nach A3; A1 existierenden Geraden $g_1 = P_1 P_2$; $g_2 = P_2 P_3$; $g_3 = P_3 P_1$; $g_4 = Q_{12} Q_{23}$, wobei Q_{12}; Q_{23} nach S1.3 definiert sind. Zunächst gilt $g_i \varnothing g_k$ $(i \neq k; i, k = 1, 2, 3, 4)$: Für $i, k \neq 4$ folgt dies aus A3. Wäre $g_1 \bigcirc g_4$, so würde wegen $g_1 \varnothing g_2$ folgen: $P_2 \bigcirc Q_{23}$, im Widerspruch zu S1.3. Ebenso folgt $g_4 \varnothing g_2, g_3$. Weiter gilt aber auch $g_i\, g_k \varnothing g_i\, g_l$ $(i \neq k, l; k \neq l; i, k, l = 1, 2, 3, 4)$, wie man sich leicht überlegt. Die duale Aussage zu A4 folgt schließlich aus S1.7.

[9]) Das Duale einer Aussage A erhalten wir, wie üblich, indem wir in A die Geraden durch Punkte und die Punkte durch Geraden ersetzen.

S1.9. Zu g gibt es $P; Q; R$ mit $P, Q, R \mathrel{I} g$; $P \not\bigcirc Q$; $Q \not\bigcirc R$; $R \not\bigcirc P$. (Die Existenz von drei Fernpunkten auf jeder Geraden.)

S1.10. Aus $g \bigcirc h$; $h \bigcirc j$ folgt $g \bigcirc j$. (Die Transitivität der Nachbarrelation für Geraden.)

Diese beiden Sätze sind dual zu S1.5 und S1.7. Wegen S1.8 sind sie also ebenfalls gültig.

S1.11. $g \bigcirc h$ gilt dann und nur dann, wenn es zu jedem $P \mathrel{I} g$ einen Nachbarpunkt $Q \mathrel{I} h$ und zu jedem $Q \mathrel{I} h$ einen Nachbarpunkt $P \mathrel{I} g$ gibt.

Es sei $g \bigcirc h$. Zu P mit $P \mathrel{I} g$ gibt es nach S1.5. j mit $j \mathrel{I} P$; $j \not\bigcirc g$. Nach A5 gilt für $Q = hj$: $Q \bigcirc P$. Ebenso schließt man, von Q ausgehend. Zum Beweis der Umkehrung betrachten wir $R = g\,h$. Nach S1.9 gibt es P mit $P \mathrel{I} g$; $P \not\bigcirc R$. Nach Voraussetzung gibt es Q mit $Q \mathrel{I} h$; $Q \bigcirc P$, woraus nach A6 $g \bigcirc h$ folgt.

2. Die Großgeometrie[7]).

S2.1. Die Relation „benachbart" für Punkte und Geraden ist eine Äquivalenzrelation.

Die Symmetrie und Reflexivität folgen aus D1 und D2, die Transitivität aus S1.7 und S1.10.

D5. Die Klassen benachbarter Punkte und benachbarter Geraden nennen wir *Großpunkte* $\overline{P}$ und *Großgeraden* $\overline{g}$. Die Relation „inzident" für ein Paar $\overline{P}; \overline{g}$ soll gelten, $\overline{P} \mathrel{I} \overline{g}$, wenn es $P; g$ mit $P \in \overline{P}$; $g \in \overline{g}$ so gibt, daß $P \mathrel{I} g$ gilt. Der so definierte Bereich heiße die zu ε_p gehörende *Großgeometrie* oder *Großinzidenzebene.*

S2.2. In der Großgeometrie gelten die Axiome A1; A2; A3; $\overline{\text{A}}4$. Wir bezeichnen sie daher auch mit $\overline{\varepsilon}_p$.

(a) Es gilt A1. Sind nämlich P und Q Repräsentanten von $\overline{P}$ und $\overline{Q}$, so repräsentiert gemäß D5 die Gerade PQ eine Verbindungsgerade von $\overline{P}; \overline{Q}$. Ebenso folgt die Gültigkeit von A2. Die durch die vier Punkte $P_1; P_2; P_3; P_4$ aus A3 bestimmten Großpunkte $\overline{P}_1; \overline{P}_2; \overline{P}_3; \overline{P}_4$ genügen wiederum einem Axiom A3; denn aus der Eigenschaft „nicht benachbart" in ε_p wird „verschieden" beim Übergang zur Großgeometrie $\overline{\varepsilon}_p$, und dies ist in $\overline{\varepsilon}_p$ gleichbedeutend mit „nicht benachbart". Denn aus $\overline{P} \bigcirc \overline{Q}$ folgt $\overline{P} = \overline{Q}$: $\overline{P} \bigcirc \overline{Q}$ bedeutet nämlich, daß es $P_1, P_2 \in \overline{P}$; $Q_1, Q_2 \in \overline{Q}$ gibt mit $g = P_1 Q_1$; $h = P_2 Q_2$; $g \not\bigcirc h$. Nach A6 gilt dann für $R = g\,h$: $R \bigcirc P_1$; $R \bigcirc Q_1 \bigcirc Q_2$, also $\overline{P} = \overline{Q}$.

3. Affine Ebenen mit Nachbarelementen.

D6. Zu einer Geraden g_∞^* von ε_p gehört eine *affine Inzidenzebene* ε_a *mit Nachbarelementen.* Sie besteht aus der Gesamtheit der Geraden und Punkte von ε_p ausgenommen die Gerade g_∞^* und die zu g_∞^* benachbarten Geraden g_∞ sowie die mit g_∞ inzidierenden Punkte P_∞. Die Inzidenzrelation für ein Paar $g; P \in \varepsilon_a$ wird aus ε_p übernommen. Die nicht zu ε_a gehörenden Geraden g_∞ und Punkte P_∞ von ε_p heißen *uneigentlich*; insbesondere heißen g_∞^* und die

mit g_∞^* inzidierenden Punkte P_∞^* *ausgezeichnet uneigentlich*. $P, g \in \varepsilon_a$ heißen *eigentlich*[10]).

D7. Ist ε_p speziell eine Ebene $\bar{\varepsilon}_p$ mit Eindeutigkeitsaxiom $\bar{A}4$, so heißt die mit Hilfe einer Geraden gemäß D6 erklärte affine Inzidenzebene ε_a mit Nachbarelementen *(eindeutige) affine Inzidenzebene* $\bar{\varepsilon}_a$.

S3.1. Der Übergang von ε_p zu ε_a gemäß D6 bedeutet in der zugehörigen Großgeometrie $\bar{\varepsilon}_p$ den Übergang zu einer eindeutigen affinen Inzidenzebene $\bar{\varepsilon}_a$.

Denn die Konstruktion von ε_a aus ε_p bedeutet in der Großgeometrie die Herausnahme einer Großgeraden und der mit ihr inzidierenden Großpunkte aus $\bar{\varepsilon}_p$, also in der Tat die Konstruktion einer Ebene $\bar{\varepsilon}_a$.

S3.2. Seien $P, g \in \varepsilon_a$. Dann gilt $P \varnothing P_\infty; g \varnothing g_\infty$.

Das folgt unmittelbar aus D6.

S3.3. Zu $g \in \varepsilon_a$ gibt es genau einen Punkt $P_\infty^* = g\, g_\infty^*$. Zu $P \in \varepsilon_a$ und P_∞^* gibt es genau eine Verbindungsgerade $h = P\, P_\infty^* \in \varepsilon_a$.

Dies folgt aus S3.2.

S3.4. Aus $g \mathrel{I} P_\infty, Q_\infty; g \in \varepsilon_a$ folgt $P_\infty \bigcirc Q_\infty$.

Dies folgt aus S3.1.

S3.5. Für $P, Q \in \varepsilon_a$ gilt $P \bigcirc Q$ im Sinne von D1 genau dann, wenn es $g, h \in \varepsilon_a$ gibt mit $g \neq h$; $g, h \mathrel{I} P, Q$. Für $g, h \in \varepsilon_a$ gilt $g \bigcirc h$ im Sinne von D2 genau dann, wenn es zu $P \in \varepsilon_a$; $P \mathrel{I} g$ ein Q gibt mit $Q \in \varepsilon_a$; $Q \mathrel{I} h$; $Q \bigcirc P$ und wenn es zu $Q \in \varepsilon_a$; $Q \mathrel{I} h$ ein P gibt mit $P \in \varepsilon_a$; $P \mathrel{I} g$; $P \bigcirc Q$.

Das Letztere folgt aus S1.11 und S3.2.

D8. Für $g, h \in \varepsilon_a$ wird die Relation „g parallel h", $g \parallel h$, erklärt durch $g\, g_\infty^* = h\, g_\infty^*$. Die Negation wird mit $g \nparallel h$ bezeichnet.

S3.6. Eine affine Inzidenzebene ε_a mit Nachbarelementen hat folgende Eigenschaften (es sind dies diejenigen Eigenschaften, die wir später von ε_a allein benutzen werden): ε_a ist eine Menge von Punkten $P, Q, R, \ldots$, in der gewisse Teilmengen, genannt Geraden $g, h, j, \ldots$, ausgezeichnet sind. Statt $P \in g$ schreiben wir $P \mathrel{I} g$ und nennen P und g auch inzident. Die Negation wird mit $P \not\mathrel{I} g$ bezeichnet. P und Q heißen benachbart, $P \bigcirc Q$, wenn es $g; h$ gibt mit $g \neq h$; $g, h \mathrel{I} P, Q$. g und h heißen benachbart, $g \bigcirc h$, wenn es zu P mit $P \mathrel{I} g$ ein Q mit $Q \mathrel{I} h$; $Q \bigcirc P$ und zu Q mit $Q \mathrel{I} h$ ein P mit $P \mathrel{I} g$; $P \bigcirc Q$ gibt. Sind $P; Q$ nicht benachbart, $P \varnothing Q$, so heißen P und Q auch fern. Für die Geradenpaare g, h ist die symmetrische und reflexive Relation „parallel", $g \parallel h$, erklärt; die Negation wird mit $g \nparallel h$ bezeichnet.

Dabei gelten die Sätze:

(a) Zu $P; Q$ gibt es g mit $g \mathrel{I} P, Q$. Für g schreiben wir auch PQ und nennen es Verbindungsgerade.

(b) Es gibt drei Fernpunkte $P_1; P_2; P_3$ so, daß $P_i P_k \varnothing P_i P_l$ (i, k, l eine Permutation von 1, 2, 3).

(c) Zu g gibt es $P; Q$ mit $P, Q \mathrel{I} g; P \varnothing Q$.

[10]) Dies entspricht dem bekannten Übergang von einer eindeutigen projektiven Inzidenzebene $\bar{\varepsilon}_p$ zu einer eindeutigen affinen Inzidenzebene $\bar{\varepsilon}_a$.

(d) Aus $P \bigcirc Q; Q \bigcirc R$ folgt $P \bigcirc R$.
(e) Aus $g \bigcirc h; h \bigcirc j$ folgt $g \bigcirc j$.
(f) Aus $P \bigcirc Q; g = PR; h = QR; g \varnothing h$ folgt $R \bigcirc P, Q$.
(g) Aus $g \bigcirc h; P \mathrel{I} g, j; Q \mathrel{I} h, j; j \varnothing g$ folgt $P \bigcirc Q$.
(h) Aus $g \parallel h; h \parallel j$ folgt $g \parallel j$.
(i) Zu $g \parallel h; P \mathrel{I} g, j; j \varnothing g$ gibt es Q mit $Q \mathrel{I} h, j; j \varnothing h$.
(j) Zu $P; g$ gibt es genau ein h mit $h \parallel g; h \mathrel{I} P$.
[Die nächsten beiden Sätze folgen aus (a) bis (j).]
(k) Es sei $g \parallel h$. Dann gilt $g \bigcirc h$ dann und nur dann, wenn es $P; Q$ gibt mit $P \mathrel{I} g; Q \mathrel{I} h; P \bigcirc Q$.
(l) Es gebe $P_0; g; g'; h$ mit $P_0 \mathrel{I} g, g'; g \varnothing g'$. Dann gibt es P mit $P \mathrel{I} g, h$, $g \varnothing h$ oder P' mit $P' \mathrel{I} g', h; g' \varnothing h$.

Beweis. Zunächst ist es klar, daß die gemäß D6 erklärte Ebene den zu Anfang beschriebenen Charakter hat. Insbesondere kann wegen S1.11 die Eigenschaft „benachbart" auf die oben angegebene Weise beschrieben werden. Wir müssen also nur noch zeigen, daß die Sätze (a) bis (l) in ε_a gelten: (a) folgt aus A1. (b) gilt, da wenigstens einer der in A3 vorkommenden Punkte, etwa P_1, eigentlich ist. Nach S1.5 und S1.9 gibt es dann zwei Kreuzgeraden durch P_1 und auf jeder von ihnen einen eigentlichen Fernpunkt.

(c) folgt aus S1.9 und (d) und (e) folgen aus S1.7 und S1.10. (f) folgt aus A6 und (g) aus A5. (h) folgt aus D8 und S3.2. (i) folgt aus D8 und A6; denn wäre der Schnittpunkt von j und h uneigentlich, $hj = Q_\infty$, so würde nach S3.4 $Q_\infty \bigcirc P_\infty^* = g\, g_\infty^*$ gelten, also nach A6 $P \bigcirc P_\infty^*$. Aus $j \bigcirc h$ würde nach S3.2, A5 $j \bigcirc g$ folgen.

(j) gilt wegen S3.3. Wenn in (k) $g \parallel h; P \mathrel{I} g; Q \mathrel{I} h; P \bigcirc Q$ gilt, so betrachten wir einen Punkt R mit $R \mathrel{I} g; R \varnothing P$ gemäß (c). Für $j = Q\,R$ gilt wegen (g) und (i) $j \bigcirc g$ und $j \bigcirc h$, also nach (e) $g \bigcirc h$. Schließlich gilt auch (l), da für ein k mit $k \mathrel{I} P_0; k \parallel h$ wegen (e) $k \varnothing g$ oder $k \varnothing g'$ gilt, woraus mit (i) die Behauptung folgt.

Bemerkungen. Wir haben in S3.6 die wichtigsten Eigenschaften von ε_a zusammengestellt; dabei haben wir jedoch nicht näher untersucht, ob einige der genannten Sätze eine Folge der übrigen sind oder durch einfachere Sätze ersetzt werden können.

Vor allem bleibt es eine offene Frage, ob durch S3.6 die affine Inzidenzebene mit Nachbarelementen ε_a gekennzeichnet ist. Dazu müßte man zeigen, daß man eine Ebene mit den Eigenschaften von S3.6 in eine projektive Ebene mit Nachbarelementen ε_p einbetten kann. Wenn $\overline{\text{A}}4$ gilt, also ε_a eine eindeutige affine Ebene $\bar{\varepsilon}_a$ ist, dann ist eine solche Einbettung in eine projektive eindeutige Inzidenzebene $\bar{\varepsilon}_p$ bekanntlich möglich: Von den Sätzen aus S3.6 werden dann nämlich ein Teil trivial und die übrigen [insbesondere (a), (b) und (j)] gestatten die Einführung einer uneigentlichen Geraden, durch welche $\bar{\varepsilon}_a$ zu einer Ebene $\bar{\varepsilon}_p$ ergänzt wird.

Gilt jedoch $\overline{\text{A}}4$ nicht, so gibt es zu einer Geraden durch einen nicht auf ihr gelegenen Punkt außer der Parallelen noch weitere Nichtschneidende

Außer den ausgezeichneten Idealpunkten, repräsentiert durch die Büschel paralleler Geraden, wird die Einführung weiterer Idealpunkte notwendig. Ob dieses auf Grund der Eigenschaften aus S3.6 so möglich ist, daß man dadurch eine Ebene vom Typ ε_p erhält, erscheint fraglich. Dies Problem ist von ähnlicher Art wie dasjenige, von einer begrenzten Ebene (mit Eindeutigkeitseigenschaften) auf eine vollständige Ebene zu schließen[11]). Letzteres ist bekanntlich möglich, wenn in der begrenzten Ebene gewisse Schnittpunktsätze gelten.

Auch in unserem Falle werden die folgenden Ergebnisse zeigen, daß man eine durch die Eigenschaften von S3.6 gekennzeichnete Ebene jedenfalls dann in eine Ebene ε_p einbetten kann, wenn gewisse Schließungssätze gelten. Vgl. S5.17.

4. Schließungssätze.

D9. Unter einem *Schließungssatz* oder *Schnittpunktsatz* Σ in ε_p verstehen wir eine Aussage folgender Art: Die Voraussetzung von Σ hat die Form: Es sei η_1 ein Element von ε_p (die η_i stehen hier für einen Punkt oder eine Gerade, und zwar ist bei einem bestimmten Schließungssatz genau festgelegt, um was für eine Art dieser beiden Elemente es sich handelt) und η_2 ein zweites Element von ε_p so, daß eine gegebenenfalls formulierte Inzidenzrelation zwischen η_1 und η_2 erfüllt ist; ferner seien $\eta_3, \ldots$ und schließlich η_n solche Elemente, daß eine gegebenenfalls formulierte Inzidenzrelation zwischen η_i und den $\eta_1, \ldots, \eta_{i-1}$ $(i = 3, \ldots, n)$ erfüllt ist. Außerdem sollen unter den Voraussetzungen von Σ noch solche Bedingungen vorkommen, die besagen, daß gewisse Elemente nicht benachbart sind, und zwar: Ist das Element η_k mit genau zwei Elementen η_i, η_j $(i, j < k)$ durch eine in Σ formulierte Inzidenzrelation verknüpft, so soll $\eta_i \varnothing \eta_j$ gelten; es soll dann also η_k eindeutig durch η_i, η_j bestimmt sein.

Ein Schließungssatz Σ ist nun eine Aussage der Art: Aus den Voraussetzungen von Σ folgt, daß zwei in den Voraussetzungen vorkommende Elemente inzidieren. Dabei wollen wir noch voraussetzen, daß der Schließungssatz so beschaffen sei, daß er in jeder projektiven Ebene über einem Körper gilt[12]).

D10. Einem Schließungssatz Σ in ε_p ordnen wir einen Schließungssatz $\bar{\Sigma}$ in der zugehörigen Großgeometrie $\bar{\varepsilon}_p$ dadurch zu, daß wir den Elementen η_i von Σ die Großelemente $\bar{\eta}_i$ aus $\bar{\varepsilon}_p$ zuordnen.

Daß die Definition D10 sinnvoll ist, folgt aus

S4.1. Beim Übergang von Σ zu $\bar{\Sigma}$ gemäß D10 gehen die Voraussetzungen von Σ wieder in die Voraussetzungen eines Schließungssatzes, wie sie in D9 formuliert sind, über.

[11]) Vgl. hierzu: R. Moufang, Die Einführung der idealen Elemente in die ebene Geometrie mit Hilfe des Satzes vom vollständigen Vierseit. Math. Ann. **105**, 759—778 (1931).

[12]) Vergleiche die grundsätzlichen Bemerkungen über Schnittpunktsätze bei R. Moufang, Zur Struktur der projektiven Geometrie der Ebene. Math. Ann. **105**, 536—601 (1931).

Das folgt unmittelbar aus D9, wenn man beachtet, daß wegen S2.2 die Eigenschaft „nicht benachbart" in ε_p beim Übergang zu $\bar{\varepsilon}_p$ erhalten bleibt.

Bemerkungen. Es erhebt sich die Frage nach der Abhängigkeit zwischen Schließungssätzen in ε_p. Die bekannten Abhängigkeitsbeweise von Schließungssätzen in $\bar{\varepsilon}_p$ lassen sich im allgemeinen nicht ohne weiteres auf Ebenen ε_p mit Nachbarelementen übertragen, in denen $\bar{A}4$ nicht gilt; denn bei diesen Beweisen wird meistens wesentlich $\bar{A}4$, das Eindeutigkeitsaxiom, benutzt.

Daß die Abhängigkeitsfragen in einer Ebene ε_p mit nichttrivialen Nachbarelementen komplizierter sind als in einer Ebene $\bar{\varepsilon}_p$, können wir auch daraus abnehmen, daß einem Schließungssatz Σ in ε_p ein trivialer Schließungssatz $\bar{\Sigma}$ in $\bar{\varepsilon}_p$ entsprechen kann, das ist ein Schließungssatz $\bar{\Sigma}$, der in jeder eindeutigen projektiven Inzidenzebene $\bar{\varepsilon}_p$ gilt.

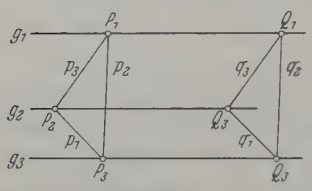

Fig. 2. δ.

Dies führt uns auf folgendes Axiom:

A^*. In ε_p sollen alle die Schließungssätze Σ gelten, die beim Übergang zu $\bar{\Sigma}$ gemäß D10 trivial werden, also eine Folge von A1, A2, A3 und $\bar{A}4$ sind.

Hiermit gilt dann offenbar der folgende Satz:

S4.2. Falls in ε_p das Axiom A^* gilt, dann ist jeder Beweis für die Abhängigkeit von Schließungssätzen in $\bar{\varepsilon}_p$ auch ein Beweis für die Abhängigkeit der entsprechenden Schließungssätze in ε_p.

Die Forderung A^* ist jedoch unbefriedigend, da man keinen Überblick über darin enthaltenen Aussagen hat. Auch dürfte es schwer fallen, bei einer vorgegebenen Ebene ε_p zu entscheiden, ob sie die Eigenschaft A^* hat oder nicht.

Wir wollen daher künftig das Axiom A^* nicht fordern und einen tieferliegenden Beitrag zum Abhängigkeitsproblem von Schließungssätzen in ε_p geben, der auch für eine spätere Anwendung wichtig ist. Dazu definieren wir zwei Schließungssätze in ε_a.

D11. Ein Schließungssatz Σ in ε_a ist ebenso definiert wie ein Schließungssatz in ε_p mit dem einzigen Unterschied, daß neben die Relation „inzident" hier auch die Relation „parallel" treten kann[13]).

D12. Unter dem *(affinen) kleinen Satz von Desargues* δ (Fig. 2; hier ist der gemeinsame Punkt von q_1 und g_2 mit Q_2 zu bezeichnen) verstehen wir folgenden Schließungssatz in ε_a[14]): Aus $g_1 \parallel g_2 \parallel g_3$; $P_2, Q_2 \mathrel{I} g_2$; $p_1, p_3 \mathrel{I} P_2$; $p_1, p_3 \varnothing g_2$; $P_1 \mathrel{I} p_3, g_1$; $P_3 \mathrel{I} p_1, g_3$; $P_1 \varnothing P_3$; $p_2 \mathrel{I} P_1 P_3$; $q_1 \mathrel{I} Q_2$; $q_1 \parallel p_1$; $q_3 \mathrel{I} Q_2$; $q_3 \parallel p_3$; $Q_1 \mathrel{I} q_3, g_1$; $Q_3 \mathrel{I} q_1, g_3$; $q_2 \mathrel{I} Q_1, Q_3$ folgt $q_2 \parallel p_2$.

Die Elemente $g_1; g_2; g_3; P_2; Q_2; p_1; p_3$, welche nicht durch zwei Relationen mit den vorhergehenden verknüpft sind, heißen *definierende Elemente* von δ.

---

[13]) Hiermit ist auch klar, was man unter einem Schließungssatz in einer durch die Eigenschaften aus S 3.6 definierten Ebene verstehen wird.

[14]) Ist ε_a speziell eine eindeutige affine Ebene $\bar{\varepsilon}_a$, so ist das Folgende als „kleiner Satz von Desargues" bekannt. Vgl. etwa W. KLINGENBERG[2]).

S4.3. Durch D12 ist ein Schließungssatz im Sinne von D11 definiert.

Beweis. Denn zunächst gilt δ bekanntlich in jeder affinen Ebene über einem Körper. Wir müssen noch zeigen, daß diejenigen Elemente, welche durch zwei Relationen mit den vorhergehenden verknüpft sind, durch diese Relationen eindeutig festgelegt sind. Es handelt sich um alle die Elemente, welche nicht zu den definierenden Elementen gehören, nämlich P_1; P_3; p_2; q_1; q_3; Q_1; Q_3; q_2.

Für den Beweis benötigen wir nur die in S3.6 angegebenen Eigenschaften von ε_a. Und zwar folgt die Eindeutigkeit von P_1; P_3 aus (i). Für p_2 folgt sie aus $P_1 \varnothing P_3$. Für q_1; q_3 folgt sie aus (j). Für q_2 folgt die Eindeutigkeit aus $Q_1 \varnothing Q_3$.

Entweder ist $g_1 \varnothing g_3$, und dann folgt $Q_1 \varnothing Q_3$ aus (k). Oder es ist $g_1 \bigcirc g_3$. Dann schließen wir folgendermaßen: Aus $P_1 \varnothing P_3$ folgt wegen (g) $p_2 \bigcirc g_1, g_3$; hieraus folgt wegen (e) $p_2 \varnothing p_1, p_3$; hieraus folgt wegen (f) $P_2 \varnothing P_1, P_3$; hieraus folgt wegen (k) $g_2 \varnothing g_1, g_3$; hieraus folgt wegen (k) $Q_2 \varnothing Q_1, Q_3$. Ferner folgt aus $P_2 \varnothing P_1$, P_3 und $P_1 \varnothing P_3$ wegen (g) $p_1 \varnothing p_3$; hieraus folgt wegen $q_1 \parallel p_1$; $q_3 \parallel p_3$ und wegen (i) $q_1 \varnothing q_3$, also wegen (f) und (d) $Q_1 \varnothing Q_3$.

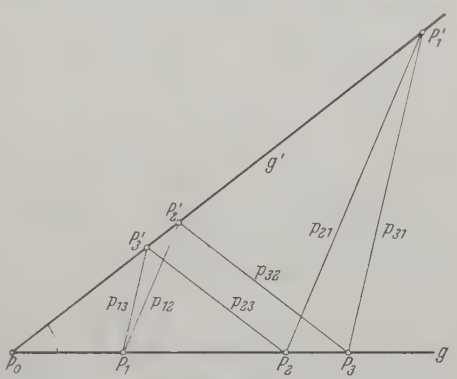

Fig. 3. *II*.

D13. Unter dem *(affinen) Satz von Pappos-Pascal II* (Fig. 3) verstehen wir folgenden Schließungssatz in ε_a [15]): Aus $P_0 \mathrm{I} g, g'$; $g \varnothing g'$; $P_1' \mathrm{I} g'$; $P_1' \varnothing P_0$; $P_2, P_3 \mathrm{I} g$; $p_{32} \mathrm{I} P_3$; $P_2' \mathrm{I} g', p_{32}$; $g' \varnothing p_{32}$; $p_{31} \mathrm{I} P_3, P_1'$; $p_{21} \mathrm{I} P_2, P_1'$; $p_{23} \parallel p_{32}$; $p_{23} \mathrm{I} P_2$; $P_3' \mathrm{I} g', p_{23}$; $p_{12} \parallel p_{21}$; $p_{12} \mathrm{I} P_2'$; $P_1 \mathrm{I} p_{12}, g$; $p_{13} \parallel p_{31}$; $p_{13} \mathrm{I} P_3'$ folgt $p_{13} \mathrm{I} P_1$.

Die Elemente P_0; g; g'; P_1'; P_2; P_3; p_{32}, welche nicht durch zwei Relationen mit den vorhergehenden verknüpft sind, heißen *definierende Elemente* von *II*.

S4.4. Durch D13 ist ein Schließungssatz im Sinne von D11 definiert.

Beweis. Zunächst gilt *II* bekanntlich in jeder affinen Ebene über einem Körper. Wir müssen noch zeigen, daß die durch zwei Relationen mit den vorhergehenden Elementen verknüpften Elemente von *II* durch diese Relationen eindeutig festgelegt sind. Es handelt sich um die Elemente P_2'; p_{31}; p_{21}; p_{23}; P_3'; p_{12}; P_1; p_{13}. Wieder verwenden wir S3.6.

Für P_2' folgt es unmittelbar aus der Voraussetzung $p_{32} \varnothing g'$; für p_{31} und p_{21} folgt dies wegen $P_1' \varnothing P_0$ und $g \varnothing g'$ aus (f). Für p_{23} folgt es aus (j), für P_3' aus (i). Für p_{12} folgt es aus (j), für P_1 aus $p_{21} \varnothing g$ und (i) [dabei folgt $p_{21} \varnothing g$ aus $P_1' \varnothing P_0$ und $g \varnothing g'$ mit (g)]. Für p_{13} folgt die Eindeutigkeit aus (j).

[15]) Ist speziell ε_a eine eindeutige affine Ebene $\bar{\varepsilon}_a$, so ist das Folgende als „affiner Satz von Pappos-Pascal" bekannt. Vgl. etwa W. KLINGENBERG[2]).

5. Die Streckenrechnung.

5.1. Die Streckenrechnung in ε_a. Wir führen nach dem HILBERTschen Vorbild in ε_a eine Streckenrechnung ein[4]).

D 14. Unter einem *Bezugssystem* $\mathfrak{B}$ (Fig. 4) in ε_a verstehen wir Elemente $P_0; g; g'; P_1; P_1'$ mit $g, g' \mathrel{I} P_0$; $g \not\equiv g'$; $P_1 \mathrel{I} g$; $P_1' \mathrel{I} g'$; $P_1, P_1' \not\equiv P_0$.

S 5.1. Im Bezugssystem $\mathfrak{B}$ gilt $P_1 \not\equiv P_1'$ und für $g_1 = P_1 P_1'$ gilt $g_1 \not\equiv g, g'$. Dies folgt aus (g) und (f).

D 15. Im Bezugssystem $\mathfrak{B}$ (Fig. 4) definieren wir noch ergänzend: $g_1 = P_1 P_1'$ und g^* mit $g^* \parallel g$; $g^* \mathrel{I} P_1'$. Die Punkte von g bezeichnen wir mit $P_a, P_b, \ldots$. Zu P_a gibt es g_a mit $g_a \parallel g_1$; $g_a \mathrel{I} P_a$. Zu g_a ist eindeutig P_a' durch $P_a' \mathrel{I} g_a, g$ bestimmt. Die Zuordnung der Punkte $P_a, P_b, \ldots$ zu den Punkten $P_a', P_b', \ldots$

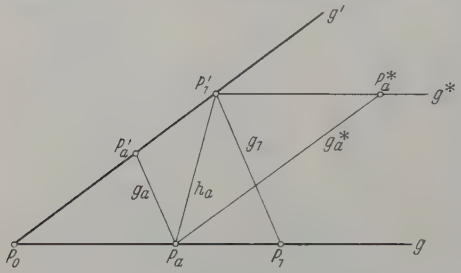

Fig. 4. $\mathfrak{B}$.

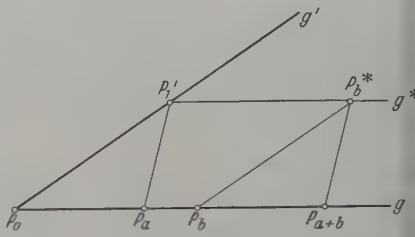

Fig. 5. $a+b$.

ist umkehrbar eindeutig. Insbesondere ist $P_0 = P_0'$. Einem P_x sind weiterhin eindeutig zugeordnet die Geraden g_a^* mit $g_a^* \mathrel{I} P_a$; $g_a^* \parallel g'$ und $h_a = P_a P_1'$ und der Punkt P_a^* mit $P_a^* \mathrel{I} g_a^*, g^*$. Wir nennen die Punkte $P_a, P_b, \ldots$ von g auch *Strecken* und bezeichnen sie dann mit $a, b, \ldots$. Insbesondere bezeichnen wir die durch P_1 und P_0 gegebenen Strecken mit 1 und 0.

S 5.2. Die in D 15 ausgesprochenen eindeutigen Zuordnungen folgen aus S 3.6. Ferner gilt $P_a \not\equiv P_a^*$ wegen (k).

D 16. Wir ordnen dem geordneten Streckenpaar $a; b$ eine mit $a+b$ bezeichnete Strecke zu nach der Vorschrift: $P_{a+b} P_b^* \parallel h_a$. Diese Zuordnung heiße *Addition*; $a+b$ heiße *Summe* von $a; b$ (Fig. 5).

S 5.3. (I) Die Summe $a+b$ existiert für jedes Paar $a; b$ und ist eindeutig festgelegt. (II) Es gibt zu $a; b$ eindeutig bestimmte Strecken x und y so, daß $x + a = b$ und $a + y = b$ gelten. (III) Es ist $a + 0 = 0 + a = a$. (IV) Aus $P_a, P_b \frown P_0$ folgt $P_{a+b} \frown P_0$; $P_{b+a} \frown P_0$; $P_{a+c}, P_{c+b} \frown P_c$.

(I), (II), (III) folgen unmittelbar aus D 16 und S 3.6. (IV) gilt, weil aus $P_a \frown P_0$ mit (f) folgt $h_a \frown g'$ und mit (i) hieraus $P_{a+b} P_b^* \frown g_b^*$. Wegen $g_b^* \not\equiv g$ folgt mit (g) $P_{a+b} \frown P_b$, also aus $P_b \frown P_0$ mit (d) $P_{a+b} \frown P_0$. Ebenso folgt der Rest.

D 17. Wir ordnen dem geordneten Streckenpaar $a; b$ eine mit $a\,b$ bezeichnete Strecke zu nach der Vorschrift: $P_{ab} \mathrel{I} j_a, g$ mit $j_a \mathrel{I} P_b'$; $j_a \parallel h_a$. Diese Zuordnung heiße *Multiplikation*, $a\,b$ das *Produkt* von $a; b$ (Fig. 6).

S 5.4. (I) Das Produkt $a\,b$ existiert stets und ist eindeutig festgelegt. (II) Es gibt zu $a; b$, falls $P_a \not\equiv P_0$, eindeutig bestimmte x und y so, daß $x\,a = b$

und $a\,y = b$ gelten. (III) Es gilt $a\,1 = 1\,a = a$. $a\,0 = 0\,a = 0$. (IV) Aus $P_a \bigcirc P_0$ folgt $P_{a\,b} \bigcirc P_0$; $P_{b\,a} \bigcirc P_0$. (V) Aus P_a, $P_b \not\bigcirc P_0$ folgt $P_{a\,b} \not\bigcirc P_0$. (VI) Zu a mit $P_a \bigcirc P_0$ gibt es b; c mit $b, c \neq 0$; $a\,b = 0$; $c\,a = 0$.

Beweis. (I) folgt aus D17 mit $h_a \not\bigcirc g$ und (i). (II) gilt, da aus $P_a \not\bigcirc P_0$ folgt $h_a \not\bigcirc g'$; mit Hilfe von j_a mit $j_a \parallel h_a$; $j_a \mathrel{I} P_b$ ist P'_y durch $P'_y \mathrel{I} g', j_a$ eindeutig festgelegt. Ferner gilt mit $P_a \not\bigcirc P_0$ auch $P'_a \not\bigcirc P_0$. Damit ist $j_x = P_b P'_a$ eindeutig bestimmt. (III) folgt unmittelbar aus D17.

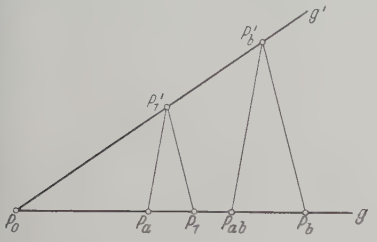

Fig. 6. $a\,b$.

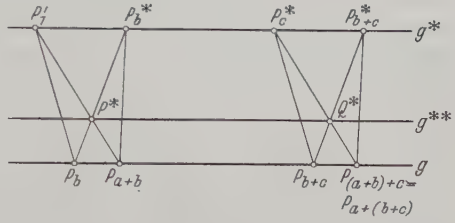

Fig. 7. $(a+b)+c = a+(b+c)$.

(IV) folgt, da mit $P_a \bigcirc P_0$ gilt $h_a \bigcirc g'$; $j_a \bigcirc g'$, also $P_{a\,b} \bigcirc P_0$. Ferner folgt aus $P_a \bigcirc P_0$ auch $P'_a \bigcirc P_0$; mit $h_b \not\bigcirc g$ gilt für j_b mit $j_b \parallel h_b$; $j_b \mathrel{I} P'_a$: $j_b \not\bigcirc g$. Hieraus folgt $P_{b\,a} \bigcirc P_0$ mit $P_{b\,a} \mathrel{I} g, j_b$. (V) ergibt sich auf ähnliche Weise. (VI) gilt, weil aus $h_a \bigcirc g'$ folgt $j_a \bigcirc g'$ mit $j_a \mathrel{I} P_0$; $j_a \parallel h_a$. Es gibt also P'_b mit $P'_b \neq P_0$; $P'_b \mathrel{I} g', j_a$. Für das zugehörige b gilt dann $a\,b = 0$; $b \neq 0$. Ferner gibt es zu $P'_a \bigcirc P_0$ ein j_c mit $j_c \mathrel{I} P_0$, P'_a; $j_c \neq g'$. Durch h_c mit $h_c \mathrel{I} P'_1$; $h_c \parallel j_c$ ist dann ein c bestimmt mit $c\,a = 0$; $c \neq 0$.

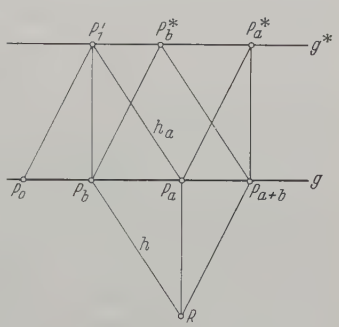

Fig. 8. $a+b = b+a$.

D18. Falls $P_a \bigcirc P_0$, so heißt die zugehörige Strecke a *Nullteiler*. Die Menge der Nullteiler bezeichnen wir mit $\boldsymbol{N}$.

5.2. Folgerungen mit δ.

S5.5. Aus δ folgt $(a+b)+c = a+(b+c)$ für $a+b \notin \boldsymbol{N}$.

Beweis (Fig. 7). Denn aus $a+b \notin \boldsymbol{N}$ folgt $h_{a+b} \not\bigcirc g'$. Nach (i) gibt es damit P^* mit $P^* \mathrel{I} g^*_b$, h_{a+b}. Es gibt g^{**}; Q^* mit $g^{**} \mathrel{I} P^*$; $g^{**} \parallel g^* \parallel g$; $Q^* \mathrel{I} g^{**}$, g^*_{b+c}. Wir fassen g; g^{**}; g^*; P^*; Q^*; h_{a+b}; g^*_b als definierende Elemente von δ auf. Man überzeugt sich leicht, daß die notwendigen Voraussetzungen dafür, daß die übrigen Elemente von δ eindeutig bestimmt sind, gelten. Somit folgt aus δ: $Q^* \mathrel{I} P^*_c\, P_{(a+b)+c}$, wobei wir das Ergebnis etwas anders formuliert haben als in D12. Indem wir hiermit g; g^{**}; g^*; P^*; Q^*; g^*_b; h_{a+b} als definierende Elemente von δ wählen, folgt $P^*_{b+c}\, P_{(a+b)+c} \parallel P^*_b\, P_{a+b}$. Da anderseits auch $P^*_{b+c}\, P_{a+(b+c)} \parallel P^*_b\, P_{a+b}$ gilt und $P^*_b\, P_{a+b} \not\bigcirc g$ ist, folgt $P_{(a+b)+c} = P_{a+(b+c)}$.

S5.6. Aus δ folgt $a+b = b+a$.

Beweis (Fig. 8). Es sei zunächst $a \notin \boldsymbol{N}$. Es gibt h mit $h \mathrel{I} P_b$; $h \parallel h_a \parallel P^*_b\, P_{a+b}$. Die Elemente h_a; $P^*_b\, P_{a+b}$; h; P^*_b; P_{a+b}; g^*_b; g^* bestimmen als definierende

Elemente von δ die übrigen eindeutig; so gilt insbesondere $g_b^* \varnothing P_b^* P_{a+b}$ wegen $a \notin \boldsymbol{N}$. Aus δ folgt mit $R; R \mathrel{I} h; R P_{a+b} \parallel P_b P_b^* : R P_a \parallel h_b$. Damit wählen wir $R P_{a+b}$; g_b^*; g_a^*; P_b; P_b^*; g; h als definierende Elemente von δ, wobei insbesondere $h \varnothing g_b^*$ aus $a \notin \boldsymbol{N}$ folgt. Aus δ folgt $P_a^* P_{a+b} \parallel P_a R \parallel h_b$. Da auch $P_a^* P_{b+a} \parallel h_b$ gilt und $h_b \varnothing g$, folgt $P_{a+b} = P_{b+a}$.

Hiermit gilt auch im Fall $b \notin \boldsymbol{N}$: $a+b=b+a$. Es sei jetzt $a, b \in \boldsymbol{N}$. Dann folgt (da nach S5.3 aus $c \in \boldsymbol{N}$; $d \notin \boldsymbol{N}$ folgt $c+d \notin \boldsymbol{N}$) mit S5.5: $a+b = a+(b+(1-1)) = a+((b+1)-1) = (a+(b+1))-1 = ((b+1)+a)-1 = (b+(1+a))-1 = (b+(a+1))-1 = b+((a+1)-1) = b+(a+(1-1)) = b+a$.

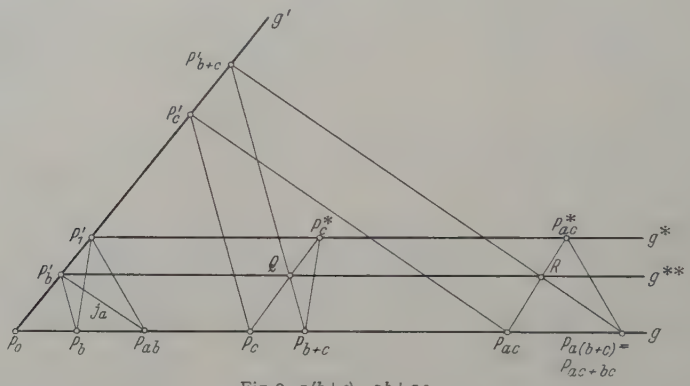

Fig. 9. $a(b+c) = ab+ac$.

S5.7. Aus δ folgt $(a+b)+c = a+(b+c)$.

Wir betrachten die Gleichungen $(a+b)+c = c+(a+b) = a+(c+b) = a+(b+c)$[16]. Die erste und dritte Gleichung folgen aus S5.6. $c+(a+b) = a+(c+b)$ folgt aber ebenso wie die Gleichung $a+b=b+a$ in S5.6, wenn wir die Addition nicht bezüglich des Bezugssystems $\mathfrak{B}$ aus D14 erklären, sondern bezüglich des Bezugssystems $\mathfrak{B}'$, in welchem die Elemente P_b; g; g_b^*; P; P_b^* mit $P \varnothing P_b$ an die Stelle von P_0; g; g'; P_1; P_1' treten.

S5.8. Aus δ folgt $a(b+c) = ab+ac$[17].

Beweis (Fig. 9; hier ist P_{ab+ac} an Stelle von P_{ac+bc} zu lesen). In der Bezeichnungsweise von D15 wird also behauptet: $P_{ac}^* P_{a(b+c)} \parallel P_1' P_{ab} = h_{ab}$.

[16]) Die geometrische Bedeutung dieser Zerlegung des Assoziativgesetzes in drei Gleichungen erhellt aus einer Bemerkung von F. BACHMANN, vgl. W. KLINGENBERG[2]) S. 130.

[17]) Mit diesem Ergebnis haben wir jetzt alle diejenigen Rechengesetze aus δ hergeleitet, die sich auch in einer eindeutigen Ebene $\bar{\varepsilon}_a$ aus δ ergeben, vgl. etwa W. KLINGENBERG[2]). In $\bar{\varepsilon}_a$ kann man jetzt noch die Geradengleichung aus δ herleiten; die Strecken bilden dann das sog. Veblen-Wedderburn-System, vgl. M. HALL[2]). Unsere Herleitung der Geradengleichung in ε_a gemäß S5.14 benutzt aber nicht nur den Schließungssatz δ; mit unserer Methode kommen wir also nicht zu einem verallgemeinerten Veblen-Wedderburn-System, welches die Ebenen ε_a in denen δ gilt, kennzeichnen würde. Es wäre interessant zu erfahren, ob man nicht durch andere Anordnung der Beweise doch noch die Eigenschaften des bis hierher unter Verwendung von δ konstruierten Zahlsystems vollständig angeben kann.

Es sei zunächst $c \notin \boldsymbol{N}$. Es gibt g^{**} mit $g^{**} \mathrel{I} P_b'$; $g^{**} \parallel g$ und Q mit $Q \mathrel{I} g^{**}$, g_{b+c}. ; g^{**}; g^*; P_b'; Q; g'; g_b bilden ein System definierender Elemente für δ, so daß $Q \mathrel{I} g_c^*$ folgt. Es gibt R mit $R \mathrel{I} g^{**}$, g_{ac}^*. Damit bestimmen g'; g_c^*; g_{ac}^*; P_c; Q; g; g_c als definierende Elemente von δ die anderen Elemente von δ eindeutig; insbesondere gilt wegen $c \notin \boldsymbol{N}$: $P_c' \not\equiv P_{ac}$. Mit k_a; $k_a \parallel P_c' P_{ac}$; $_a \mathrel{I} P_{b+c}'$, $P_{a(b+c)}$ folgt damit aus δ: $R \mathrel{I} k_a$. Es gibt j_a mit $j_a \parallel h_a$; $j_a \mathrel{I} P_b'$. Damit bilden g; g^{**}; g^*; P_b'; R; g'; j_a ein System definierender Elemente für δ, aus welchem die Behauptung $P_1' P_{ab} \parallel P_{ac}^* P_{a(b+c)}$ folgt.

Wenn $c \in \boldsymbol{N}$ gilt, so folgt mit $c+1 \notin \boldsymbol{N}$ und S5.6; S5.7 und dem eben Bewiesenen: $a(b+c) = a(b-1+c+1) = a(b-1) + a(c+1) = a\,b - a + a\,c + = a\,b + a\,c$. Hierbei haben wir auch $a(-1) = -a$ benutzt, was aus dem ersten Teil folgt.

5.3. Folgerungen mit dem Satz von Pappos-Pascal *II*.

S5.9. Wenn *II* so gilt, daß die Geraden g; g' in $\mathfrak{B}$ mit den Geraden g; g' von *II* zusammenfallen, kurz, wenn *II* in $\mathfrak{B}$ gilt, dann folgt $a\,b = b\,a$.

Die Elemente P_0; g; g'; P_1'; P_b; P_a; g_b bilden nämlich gerade ein zulässiges System von Erzeugenden für *II*.

S5.10. Gilt *II* in $\mathfrak{B}$ und gilt δ, so folgt $(a\,b)\,c = a(b\,c)$.

Von den Gleichungen $(a\,b)\,c = c(a\,b) = a(c\,b) = a(b\,c)$[16]) sind die erste und dritte eine Folge von S5.9. $c(a\,b) = a(c\,b)$ folgt für $b \notin \boldsymbol{N}$ ebenfalls direkt aus *I*, da dann P_0; g; g'; P_b'; P_{ab}; P_{cb}; g_{ab} den Schließungssatz *II* so erzeugen, daß die übrigen Elemente eindeutig bestimmt sind. Gilt dagegen $b \in \boldsymbol{N}$, so schließen wir mit $b' = b - 1 \notin \boldsymbol{N}$ unter Verwendung der bisher gewonnenen Regeln: $(a\,b)\,c = (a(b'+1))\,c = (a\,b' + a)\,c = (a\,b')\,c + a\,c = a(b'\,c) + a\,b = (b'\,c + c) = a\,((b'+1)\,c) = a(b\,c)$.

S5.11. Führt man in ε_a eine Streckenrechnung bezüglich eines Bezugssystems $\mathfrak{B}$ ein und gelten *II* in $\mathfrak{B}$ und δ, so bilden die Strecken einen kommutativen Ring $\boldsymbol{R}$ mit Einselement, in dem jeder Nichtnullteiler invertierbar ist und die Nullteiler ein Ideal $\boldsymbol{N}$ bilden.

Das ist eine Zusammenfassung der bisherigen Resultate.

S5.12. Neben der Basis $\mathfrak{B}$ betrachten wir die durch die Elemente P_0; g'; ; P_1'; P_1 definierte Basis $\mathfrak{B}'$. Die Strecken in $\mathfrak{B}'$ werden durch die Punkte P_a', P_b', ... von $\mathfrak{B}$ repräsentiert; wir bezeichnen sie mit a', b', ... An Stelle von P_a', P_b', ... schreiben wir auch $P_{a'}$, $P_{b'}$, ... Wenn jetzt die Voraussetzungen von S5.11 gelten, dann bilden die Strecken a', b', ... bezüglich der zu $\mathfrak{B}'$ gehörenden Streckenrechnung einen zu $\boldsymbol{R}$ isomorphen Ring $\boldsymbol{R}'$.

Beweis. Wir bezeichnen die Verknüpfungen der Strecken a', b', ... mit $' + b'$ und $a'\,b'$. Wir wollen zeigen, daß $(a\,b)' = a'\,b'$ und $(a+b)' = a' + b'$ gelten. Ersteres ist, wie man leicht einsieht, äquivalent mit der jedenfalls in $\boldsymbol{R}$ gültigen Regel $a^{-1}(a\,b) = (a^{-1}\,a)\,b$[18]).

$(a+b)' = a' + b'$ beweisen wir (Fig. 10) mit Hilfe von $g_{a'}^*$ mit $g_{a'}^* \parallel g \parallel g^*$; $_{a'}^* \mathrel{I} P_a'$ und Q mit $Q \mathrel{I} g_b^*$, $g_{a'}^*$. Hiermit sind nämlich g; $g_{a'}^*$; g^*; P_a'; Q; g'; g_a

[18]) Hier ist $a \notin \boldsymbol{N}$ vorausgesetzt. Für $a \in \boldsymbol{N}$ schließt man mit $a = a^* + 1$, $a^* \notin \boldsymbol{N}$ und der Regel $(a+b)' = a' + b'$ folgendermaßen: $(a\,b)' = (a^*\,b + b)' = a^{*\prime}\,b' + b' = a'\,b'$.

zulässige definierende Elemente von δ, so daß $Q \mathrel{I} g_{a+b}$ folgt. Es gibt $P_{a'}^*$ mi $P_{a'}^* \mathrel{I} g_1^*, g_{a'}^*$. Die Elemente $g_1^*; g_b^*; g'; P_b; Q; g_b; g$ definieren eindeutig δ woraus $P_{a'}^* P'_{a+b} \parallel P_1 P'_b$ folgt. Andererseits gilt $P_1 P'_b \parallel P_{a'}^* P_{b'+a'}$, woraus, d P'_{a+b} und $P_{b'+a'}$ beide eindeutig definiert sind, $(a+b)' = b' + a' = a' + b'$ folgt

D 19. Wir geben eine Vorschrift an, nach der jedem Punkt $P \in \varepsilon_a$ in bezug auf $\mathfrak{B}$ ein geordnetes Streckenpaar $(a; b)$ als *affine Koordinaten bezüglich* zugeordnet werden: Dazu bestimmen wir $g_P; g'_P$ durch $g_P, g'_P \mathrel{I} P$; $g_P \parallel g$; $g'_P \parallel g$ und $P_a; P'_b$ durch $P_a \mathrel{I} g, g'_P$; $P'_b \mathrel{I} g', g_P$. Durch P_a und P'_b sind nach D1 eindeutig a und b bestimmt.

S 5.13. Die Punkte $P \in \varepsilon_a$ und ihre Koordinaten entsprechen sich einein deutig.

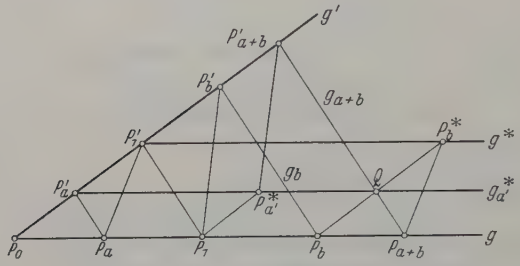

Fig. 10. $(a+b)' = a' + b'$.

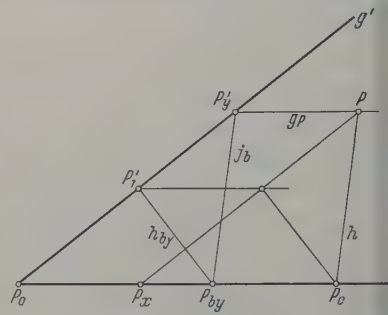

Fig. 11. $b\,y + x = c$.

Dies folgt aus den einfachsten Eigenschaften von ε_a gemäß S 3.6.

S 5.14. Die Geraden $h \in \varepsilon_a$ lassen sich in bezug auf $\mathfrak{B}$ umkehrbar eindeuti auf die bis auf einen gemeinsamen Faktor $f \in \boldsymbol{N}$ festgelegten geordnete Elementtripel $(u; v; w)$ von $\boldsymbol{R}$ mit $u \in \boldsymbol{N}$ oder $v \in \boldsymbol{N}$ abbilden. Sind $(x; y)$ di Koordinaten eines Punktes $P \in \varepsilon_a$, so gilt $P \mathrel{I} g$ genau dann, wenn $u\,x + v\,y + w = 0$ gilt.

Beweis. Gemäß S 3.6 (1) nehmen wir zunächst an (Fig. 11): Es gibt mit $P_c \mathrel{I} g, h$; $g \not\parallel h$. Für P mit den Koordinaten $(x; y)$ gelte $P \mathrel{I} h$. Es gibt h mit $h_b \mathrel{I} P'_1$; $h_b \parallel h$ und P_b mit $P_b \mathrel{I} g, h_b$. Es gibt j_b mit $j_b \parallel h_b \parallel h$; $j_b \mathrel{I} P'_y$ un $P_{by} \mathrel{I} g, j_b$. Die Elemente $g; g_P; g^*; P'_y; P; g'; j_b$ definieren eindeutig δ, worau $b\,y + x = c$ folgt.

Andernfalls gibt es P'_c mit $P'_c \mathrel{I} g', h$; $g' \not\parallel h$. Dann folgt wie eben für ei $P' = (x'; y')$ mit $P' \mathrel{I} h$: $b'\,x' + y' = c'$, womit wegen S 5.12 auch $b\,x + y = c$ gilt

Die so der Geraden h eindeutig zugeordneten Elementtripel der For $(1; b; -c)$ oder $(b; 1; -c)$ bestimmen umgekehrt die Gerade h eindeuti durch die Forderungen $h \parallel h_b$; $h \mathrel{I} P_c$ oder $h \parallel h'_b = P_1 P'_b$; $h \mathrel{I} P'_c$. Dabei folgt au der linearen Gleichung die Gültigkeit der Inzidenzrelation.

S 5.15. Zu $a, b \in \boldsymbol{R}$ gibt es $m \in \boldsymbol{R}$ oder $n \in \boldsymbol{R}$ so, daß $a = m\,b$ oder $b = n\,a$ gilt

Sei $P = (a; b)$. Es gibt $h = P P_0$. Nach S 5.14 gibt es zu h ein Trip $(u; v; w)$ mit $u \notin \boldsymbol{N}$ oder $v \notin \boldsymbol{N}$ und $w = 0$; $u\,a + v\,b = 0$. Nach S 5.11 folg hieraus bei $u \notin \boldsymbol{N}$: $a = -v\,u^{-1}\,b$ und bei $v \notin \boldsymbol{N}$: $b = -u\,v^{-1}\,a$.

D 20. Unter einem Hjelmslev*schen Ring* oder *H-Ring* $\boldsymbol{R}_H$ verstehen wir einen kommutativen Ring mit Einselement, in dem jeder Nichtnullteiler Einheit ist und von zwei Nullteilern wenigstens einer den anderen teilt.

S 5.16. In einer affinen Inzidenzebene mit Nachbarelementen ε_a, oder allgemeiner, in einer durch die Eigenschaften von S 3.6 definierten Ebene mögen die Schließungssätze δ und Π in der angegebenen Formulierung gelten, dabei Π mit der Beschränkung auf ein festes Geradenpaar $g; g'$. Wählt man $g; g'$ als Achsen eines Bezugssystems, so läßt sich mit Hilfe der nach dem Hilbertschen Vorbild eingeführten Streckenrechnung zeigen, daß die Ebene ε_a in der üblichen Weise als affine Geometrie über einem H-Ring beschrieben werden kann: Den Punkten entsprechen die geordneten Elementpaare $(x; y)$, den Geraden die homogenen Tripel $(u; v; w)$ mit $u \notin \boldsymbol{N}$ oder $v \notin \boldsymbol{N}$ und der Inzidenzrelation die lineare Gleichung $u\,x + v\,y + w = 0$. $u\,v' - v\,u' = 0$ bedeutet, daß die Geraden g und g' mit den Koordinaten $(u; v; w)$ und $(u'; v'; w')$ parallel sind.

Dies ist eine Zusammenfassung der bisherigen Ergebnisse.

5.4. Der Übergang zu ε_p.

S 5.17. Es sei eine affine Ebene ε_a mit Nachbarelementen auf die in S 5.16 angegebene Weise als affine Geometrie über einem H-Ring $\boldsymbol{R}_H$ beschrieben. Dann kann man die projektive Inzidenzebene ε_p, in die ε_a eingebettet ist, auf folgende Weise als projektive Geometrie über dem H-Ring $\boldsymbol{R}_H$ beschreiben: Den Punkten und Geraden von ε_p entsprechen die geordneten homogenen Elementtripel $(x; y; z)$ und $(u; v; w)$ von $\boldsymbol{R}_H$, in denen nicht alle Elemente Nullteiler sind, und die Inzidenzrelation wird durch $u\,x + v\,y + w\,z = 0$ beschrieben. Den nicht zu ε_a gehörenden Elementen von ε_p entsprechen die Tripel mit $z \in \boldsymbol{N}$ und $u, v \in \boldsymbol{N}$.

Gleichzeitig lehrt der Beweis dieses Satzes, daß eine Ebene ε_a^*, die durch die Eigenschaften von S 3.6 definiert ist, sich in eine Ebene ε_p einbetten läßt, sobald in ε_a^* die Schließungssätze δ und Π in der in S 5.16 angegebenen Weise gelten.

Beweis. Wir verwenden die durch die Elemente $P_0; g; g'; P_1; P_1'$ definierte Basis $\mathfrak{B}$. Zu einem uneigentlichen Punkt $P_\infty \notin \varepsilon_a$ gibt es $h_0 = P_0 P_\infty$. (I) Es sei $h_0 \not\circ g$. Dann gilt für $h_1 = P_1 P_\infty : h_1 \not\circ h_0$. P_∞ ist also eindeutig durch h_0 und h_1 bestimmt. Die Koordinaten von $h_0; h_1$ normieren wir zu $(1; v; 0); (1; v_1; -1)$, wobei $v - v_1 \in \boldsymbol{N}$ ist. Damit ordnen wir dem Punkt P_∞ die Koordinaten $(-v; 1; v_1 - v)$ zu, aus denen sich umgekehrt eindeutig die Koordinaten von h_0 und h_1 bestimmen. Auf diese Weise ist jedem homogenen Tripel $(x; y; z)$ mit $y \notin \boldsymbol{N}; z \in \boldsymbol{N}$ eineindeutig ein uneigentlicher Punkt zugeordnet.

(II) Es gelte $h_0 \circ g$, also $h_0 \not\circ g'$. Es gibt h_1' mit $h_1' = P_1' P_\infty$; $h_1' \not\circ h_0$. P_∞ ist also eineindeutig durch $h_0; h_1'$ bestimmt. Die Koordinaten von $h_0; h_1'$ normieren wir zu $(u; 1; 0); (u_1'; 1; -1)$, wobei $u, u - u_1' \in \boldsymbol{N}$ ist. Als Koordinaten von P_∞ nehmen wir $(1; -u; u_1' - u)$. Umgekehrt ist jedem homogenen Tripel $(x; y; z)$ mit $y, z \in \boldsymbol{N}$; $x \notin \boldsymbol{N}$ hierdurch ein P_∞ zugeordnet.

Die uneigentlichen Geraden g_∞ werden durch die Punktepaare $P_\infty = g\, g_\infty$ $P'_\infty = g'\, g_\infty$ bestimmt. Die Koordinaten von P_∞; P'_∞ haben die Form $(0;1;z)$ $(1;0;z')$ mit $z, z' \in \boldsymbol{N}$. Damit ordnen wir g_∞ das Tripel $(z';z;1)$ zu und um gekehrt bestimmt jedes Tripel $(u;v;w)$ mit $u, v \in \boldsymbol{N}$ und $w \notin \boldsymbol{N}$ eindeutig zwei Punkte P_∞; P'_∞ und damit die Gerade $g_\infty = P_\infty P'_\infty$.

Zum Schluß überzeugt man sich davon, daß bei diesen Definitionen die Inzidenzrelation in ε_p durch die lineare Gleichung $u\,x + v\,y + w\,z = 0$ be schrieben wird.

6. Projektive und affine Ebenen über H-Ringen.

6.1. Die projektive Ebene über einem H-Ring.

D21. Die projektive Ebene über einem H-Ring $\boldsymbol{R}_H$, $\varepsilon_p(\boldsymbol{R}_H)$, wird von den als Punkte $P; Q; R; \ldots$ und Geraden $g; h; j; \ldots$ bezeichneten homogenen (d.h. bis auf einen gemeinsamen Faktor $f \notin \boldsymbol{N}$ festgelegten) geordneten Elementtripeln $(x; y; z)$ und $(u; v; w)$ gebildet, zwischen denen die Relation „inzident" durch $u\,x + v\,y + w\,z = 0$ erklärt ist. Dabei sollen in den Tripeln nicht alle Elemente Nullteiler sein.

S6.1. In $\varepsilon_p(\boldsymbol{R}_H)$ gilt $g \bigcirc g'$ dann und nur dann, wenn für die zugehörigen Tripel $(u; v; w)$; $(u'; v'; w')$ gilt

$$(1) \qquad v\,w' - w\,v', \quad w\,u' - u\,w', \quad u\,v' - v\,u' \in \boldsymbol{N}.$$

Ebenso gilt $P \bigcirc P'$ dann und nur dann, wenn für die zugehörigen Tripel $(x; y; z)$; $(x'; y'; z')$ gilt

$$(2) \qquad y\,z' - z\,y', \quad z\,x' - x\,z', \quad x\,y' - y\,x' \in \boldsymbol{N}.$$

Es genügt, die Behauptung für die Punkte zu beweisen: Wenn (2) nicht gilt, dann bestimmen P; P' offenbar nach dem üblichen Auflösungsverfahren eindeutig eine Verbindungsgerade. Gilt dagegen (2), so nehmen wir etwa $x \notin \boldsymbol{N}$ an. In $\boldsymbol{R}_H$ läßt sich stets die Beziehung $r(x\,y' - y\,x') = s(z\,x' - x\,z')$ so erfüllen, daß $r = 1$ oder $s = 1$ gilt. Sei etwa $s = 1$. Für die durch $(x^{-1}(-y\,v - z); v; 1)$ bestimmte Gerade g gilt $g \mathrel{I} P$. Wenn wir $v = r$ wählen, gilt auch $g \mathrel{I} P'$. Wegen $x\,y' - y\,x' \in \boldsymbol{N}$ gibt es r' mit $r' \neq 0$; $r'(x\,y' - y\,x') = 0$. Wenn wir $v = r + r'$ wählen und dadurch g' mit $g' \neq g$ definieren, so gilt auch $g' \mathrel{I} P, P'$.

S6.2. In $\varepsilon_p(\boldsymbol{R}_H)$ gelten die Axiome A1 bis A6, $\varepsilon_p(\boldsymbol{R}_H)$ ist also eine projektive Inzidenzebene mit Nachbarelementen ε_p.

Beweis. A1 und A2 ergeben sich aus dem Beweis von S6.1. Dem Axiom A3 genügen etwa die Punkte $(1;0;0)$; $(0;1;0)$; $(0;0;1)$; $(1;1;1)$. Zum Beweis von A4 zeigen wir: Aus $g \bigcirc g'$; $g' \bigcirc g''$ folgt $g \bigcirc g''$. Die Voraussetzungen schreiben sich nach S6.1 in der Form

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{c} v\,w' - w\,v', \; w\,u' - u\,w', \; u\,v' - v\,u', \; v'\,w'' - w'\,v'', \\ w'\,u'' - u'\,w'', \; u'\,v'' - v'\,u'' \in \boldsymbol{N}. \end{array} \right.$$

Es sei nun etwa $u' \notin \boldsymbol{N}$. Dann gilt auch $u, u'' \notin \boldsymbol{N}$. Denn wäre etwa $u \in \boldsymbol{N}$, so würde aus $u\,v' - v\,u', \; w\,u' - u\,w' \in \boldsymbol{N}$ folgen: $v, w \in \boldsymbol{N}$. Wir normieren also u, u', u'' zu 1. Setzen wir dies in (3) ein, so folgt aus den Eigenschaften von

$\boldsymbol{R}_H$ unmittelbar: $v\,w'' - w\,v''$, $w - w''$, $v'' - v \in \boldsymbol{N}$, was nach S6.1 der Behauptung $g \bigcirc g''$ entspricht.

Zum Beweis von A5 betrachten wir g, g', g'' mit $g \bigcirc g', g \oslash g''$, woraus nach dem eben Bewiesenen folgt $g' \oslash g''$. Damit lassen sich die Koordinaten von $P = g\,g''$ und $P' = g'\,g''$ in der Form schreiben

$$P = (v\,w'' - w\,v''\,;\; w\,u'' - u\,w''\,;\; u\,v'' - v\,u'')$$
$$P' = (v'\,w'' - w'\,v''\,;\; w'\,u'' - u'\,w''\,;\; u'\,v'' - v'\,u'').$$

Bilden wir hiermit die zweireihigen Determinanten gemäß (2), so finden wir für diese die Werte

$$q\,u'', q\,v'', q\,w'' \quad \text{mit} \quad q = u''(v\,w' - w\,v') + v''(w\,u' - u\,w') + w''(u\,v' - v\,u').$$

Wegen $g \bigcirc g'$ gilt nach S6.1 $q \in \boldsymbol{N}$, so daß auch $P \bigcirc P'$ gilt.

A6 folgt ebenso wie A5.

S6.3. Der Übergang von $\varepsilon_p(\boldsymbol{R}_H)$ zur Großgeometrie bedeutet den Übergang zu der Ebene $\varepsilon_p(\boldsymbol{K})$, wo $\boldsymbol{K} \simeq \boldsymbol{R}_H/\boldsymbol{N}$ ein Körper ist, isomorph zum Restklassenring nach dem teilerlosen Ideal $\boldsymbol{N}$ der Nullteiler.

Der Übergang zur Großgeometrie bedeutet ja das Rechnen modulo der Nullteiler in $\boldsymbol{R}_H$. Da alle Nichtnullteiler invertierbar sind, ist $\boldsymbol{N}$ teilerlos, $\boldsymbol{R}_H/\boldsymbol{N}$ also ein Körper.

S6.4. In $\varepsilon_p(\boldsymbol{R}_H)$ gelten alle Schließungssätze; d.h. alle diejenigen Typen von Schließungssätzen, die auch im Spezialfall $\boldsymbol{R}_H = \boldsymbol{K}$ gelten, wo $\varepsilon_p(\boldsymbol{K})$ die projektive Ebene über einem Körper ist.

Betrachten wir nämlich einen Schließungssatz Σ in $\varepsilon_p(\boldsymbol{K})$, so bemerken wir, daß sich die einzelnen Voraussetzungen von Σ alle unter alleiniger Verwendung der Ringoperationen ausdrücken lassen, unter Verwendung des Reziproken eines Elements. Ebenso ist die Behauptung von Σ, die auf eine Körperidentität führt, schon als Ringidentität formulierbar.

Betrachten wir nun denselben Schließungssatz Σ in einer Ebene $\varepsilon_p(\boldsymbol{R}_H)$, so können wir alle Voraussetzungen ebenso formulieren wie in einer Ebene $\varepsilon_p(\boldsymbol{K})$. Denn sobald ein Element η_k in den Voraussetzungen von Σ mit zwei Elementen η_i, η_j durch Inzidenzrelationen verknüpft ist, d.h., sobald ein homogenes lineares Gleichungssystem zu lösen ist, existiert diese Lösung auch in $\boldsymbol{R}_H$, da η_i, η_j dann ja nicht benachbart sind, die Determinanten des Gleichungssystems also nicht alle Nullteiler sind. Damit drückt sich dann aber auch die Behauptung von Σ in $\varepsilon_p(\boldsymbol{R}_H)$ ebenso aus wie in $\varepsilon_P(\boldsymbol{K})$, nämlich als Ringidentität.

6.2. Die affine Ebene über einem H-Ring.

D22. Die *affine Ebene über einem H-Ring* $\boldsymbol{R}_H$, $\varepsilon_a(\boldsymbol{R}_H)$, wird von den als Punkte bezeichneten geordneten Elementpaaren $(x; y)$ und den als Geraden bezeichneten geordneten homogenen Tripeln $(u; v; w)$ mit $u \notin \boldsymbol{N}$ oder $v \notin \boldsymbol{N}$ gebildet, zwischen denen die Relation „inzident" durch $u\,x + v\,y + w = 0$ erklärt ist. Zwei Geraden heißen parallel, wenn für ihre Koordinaten gilt $u\,v' - v\,u' = 0$.

S6.5. Sei $\varepsilon_p(\boldsymbol{R}_H)$ eine projektive Ebene über einem H-Ring $\boldsymbol{R}_H$. Der Übergang zu einer affinen Ebene gemäß D6 mit der Geraden $(0;0;1)$ als ausgezeichneter uneigentlicher Geraden führt auf eine in D22 definierte affine Ebene über $\boldsymbol{R}_H$, $\varepsilon_a(\boldsymbol{R}_H)$. Die durch $\varepsilon_p(\boldsymbol{R}_H)$ in $\varepsilon_a(\boldsymbol{R}_H)$ induzierten Relationen „benachbart" für Punkte und Geraden drücken sich in $\varepsilon_a(\boldsymbol{R}_H)$ folgendermaßen aus: $P \bigcirc P'$ entspricht $x - x',\ y - y' \in \boldsymbol{N}$ und $g \bigcirc g'$ entspricht (1).

Die Beweise liegen auf der Hand. Ebenso folgt unmittelbar aus **6.1**:

S6.6. In $\varepsilon_a(\boldsymbol{R}_H)$ gelten alle Schließungssätze.

S6.7. In **5.** hatten wir einer Ebene ε_a, in der der kleine affine Satz von Desargues δ, D12, allgemein und der affine Satz von Pappos-Pascal Π, D13, mit der Beschränkung aus ein festes Paar von Trägergeraden gilt, einen H-Ring $\boldsymbol{R}_H$ so zugeordnet, daß ε_a isomorph zu $\varepsilon_a(\boldsymbol{R}_H)$ wurde. Es gilt: $\boldsymbol{R}_H$ ist der Ebene (bis auf Isomorphie) eindeutig zugeordnet in folgendem Sinne: 1. Eine beliebige andere Wahl der Trägergeraden für den Satz von Pappos-Pascal Π führt auf einen zu $\boldsymbol{R}_H$ isomorphen H-Ring. 2. Eine beliebige von Π unabhängige Wahl des Bezugssystems in ε_a führt auf einen zu $\boldsymbol{R}_H$ isomorphen H-Ring.

Beweis. Sei $\mathfrak{B}$ das Bezugssystem, in welchem Π gültig ist. Dann gilt Π nach S6.6 auch in jedem anderen Bezugssystem $\mathfrak{B}^*$. Wir müssen also nur noch zeigen, daß in $\varepsilon_a(\boldsymbol{R}_H)$ die Streckenrechnung unabhängig ist von der Wahl von $\mathfrak{B}$ und immer auf einen zu $\boldsymbol{R}_H$ isomorphen Ring $\boldsymbol{R}_H^*$ führt. Dazu ordnen wir der durch den Punkt $(a;0)$ repräsentierten Strecke a in $\mathfrak{B}$ die durch den Punkt $(x_0 + a(x_1 - x_0);\ y_0 + a(y_1 - y_0))$ repräsentierte Strecke a^* in $\mathfrak{B}^*$ zu, wenn $(x_0; y_0)$ und $(x_1; y_1)$ die Koordinaten der Punkte P_0^* und P_1^* von $\mathfrak{B}^*$ sind. Diese Zuordnung ist nun mit der Addition und Multiplikation in $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}^*$ vertauschbar: Denn falls $\boldsymbol{R}_H$ ein Körper $\boldsymbol{K}$ ist, gilt dies bekanntlich; im allgemeinen Falle gilt es deshalb auch, weil es sich bei der Addition und Multiplikation in $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}^*$ um eindeutige Operationen handelt, die sich koordinatenmäßig in $\varepsilon_a(\boldsymbol{R}_H)$ ebenso ausdrücken wie in $\varepsilon_a(\boldsymbol{K})$.

6.3. Ein Zusammenhang zwischen H-Ringen und Bewertungsringen[5]).

D23. Ein *Bewertungsring* $\boldsymbol{B}$ ist ein Integritätsbereich mit Einselement, in welchem von je zwei Elementen wenigstens eines das andere teilt.

S6.8. Es sei $\boldsymbol{B}$ ein Bewertungsring. Die Nichteinheiten von $\boldsymbol{B}$ bilden ein teilerloses Primideal $\boldsymbol{P}$. Sei $\boldsymbol{A}$ ein Ideal $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{P}$. $\bar{\boldsymbol{B}} \cong \boldsymbol{B}/\boldsymbol{A}$ ist dann und nur dann ein H-Ring, wenn es nicht ein Primideal $\boldsymbol{Q}$ gibt mit $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{P}$.

Korollar: Ist $\boldsymbol{A}$ ein beliebiges Ideal in $\boldsymbol{P}$, so ist der Quotientenring von $\boldsymbol{B}/\boldsymbol{A}$ ein H-Ring $\boldsymbol{R}_H$. Man kann $\boldsymbol{R}_H$ auch in der Form $\boldsymbol{B}^*/\boldsymbol{A}^*$ beschreiben: Dazu sei $\boldsymbol{Q}$ das minimale Primideal mit $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{Q} \subseteq \boldsymbol{P}$. $\boldsymbol{B}^*$ sei der Quotientenring von $\boldsymbol{B}$ bezüglich $\boldsymbol{Q}$ und $\boldsymbol{A}^*$ das zu $\boldsymbol{A}$ gehörende Ideal in $\boldsymbol{B}^*$. Dann wird $\boldsymbol{B}^*/\boldsymbol{A}^*$ isomorph zum Quotientenring von $\boldsymbol{B}/\boldsymbol{A}$.

Beweis. Sei $a, b \in \boldsymbol{P}$ und es sei $a = c\,b$. Dann wird $a + b = a(1 + c) \in \boldsymbol{B}$, $1 + c \in \boldsymbol{B}$. Wäre $(a+b)^{-1} = a^{-1}(1+c)^{-1} \in \boldsymbol{B}$, so würde $a^{-1} \in \boldsymbol{B}$ folgen, entgegen der Voraussetzung. Ebenso widerspricht die Annahme: Aus $a \in \boldsymbol{P}$, $b \in \boldsymbol{B}$ folgt

$a^{-1}b^{-1} \in \boldsymbol{B}$ der Voraussetzung. Also ist $\boldsymbol{P}$ ein Ideal und nach Definition sogar teilerlos.

Sei $\boldsymbol{A}$ ein Ideal in $\boldsymbol{P}$. $\overline{\boldsymbol{B}} \cong \boldsymbol{B}/\boldsymbol{A}$ ist wieder ein kommutativer Ring mit Einselement, in dem von je zwei Elementen eines das andere teilt. $\overline{\boldsymbol{P}} \simeq \boldsymbol{P}/\boldsymbol{A}$ ist das Ideal der Nichteinheiten in $\overline{\boldsymbol{B}}$. Wir müssen untersuchen, wann $\overline{\boldsymbol{P}}$ nur aus Nullteilern besteht. Jedenfalls bilden die Nullteiler ein Primideal $\overline{\boldsymbol{Q}}$: Falls $\bar{a}, \bar{b}$ von $\bar{a}', \bar{b}' \neq 0$ anulliert werden und $\bar{a}' = \bar{r}\bar{b}'$ ist, so wird $a+b$ von $\bar{a}'$ annulliert. Das Produkt zweier Nichtnullteiler ist wieder Nichtnullteiler.

Dem Primideal $\overline{\boldsymbol{Q}}$ entspricht in $\boldsymbol{B}$ ein Primideal $\boldsymbol{Q}$ mit $\boldsymbol{Q}/\boldsymbol{A} \cong \overline{\boldsymbol{Q}}$. Hiermit folgt dann unsere Behauptung.

S6.9. Beispiele von H-Ringen auf Grund von S6.8 sind die folgenden:

1. $\boldsymbol{R}$ sei ein diskreter Bewertungsring, etwa der folgende: Im Polynombereich $\boldsymbol{K}[x]$ einer Unbestimmten x über dem Körper $\boldsymbol{K}$ sei $p = p(x)$ ein Primpolynom und $\boldsymbol{B}_p(x)$ der Ring der ganzen Elemente aus dem Körper $\boldsymbol{K}(x)$ bezüglich der zu $p(x)$ gehörenden Bewertung. Dann ist $\boldsymbol{B}_p(x)/(p^n)$ (n eine positive natürliche Zahl) ein H-Ring.

Wählt man speziell $p(x) = x$, so erhält man die schon von J. Hjelmslev betrachtete Verallgemeinerung der dualen Zahlen; letztere sind der Spezialfall: $n = 2$, $\boldsymbol{K}$ der Körper der reellen Zahlen.

$(p(x))$ ist ein teilerloses Ideal in $\boldsymbol{K}[x]$. Daher gilt $\boldsymbol{B}_p(x)/(p^n) \cong \boldsymbol{K}[x]/(p^n)$.

2. Sei $\boldsymbol{C}$ der Ring der ganzen rationalen Zahlen, $\boldsymbol{C}_p$ der Ring der bezüglich der p-adischen Bewertung ganzen Zahlen aus dem Körper der rationalen Zahlen. Dann ist $\boldsymbol{C}(p^n) \cong \boldsymbol{C}_p/(p^n)$ ein H-Ring. Für $n = 1$ erhält man die endlichen Primkörper.

3. Nach W. Krull[5]) kann man folgendermaßen zu einer beliebigen geordneten abelschen Gruppe Γ einen Bewertungsring $\boldsymbol{B}$ angeben, der Γ als Wertegruppe hat: Man betrachte über einem Körper $\boldsymbol{K}$ der Körper $\boldsymbol{K}'$ aller „rationalen Funktionen" in einer Unbestimmten x, wobei als Exponenten von x die Elemente von Γ genommen sind. Diejenigen Elemente von $\boldsymbol{K}'$, deren Differenz der „Grade" in Zähler und Nenner nicht negativ ist, bilden einen Bewertungsring $\boldsymbol{B}$. Wählt man als Γ etwa die additive Gruppe der reellen Zahlen, so ist $\boldsymbol{B}(x)$ ein H-Ring, in welchem nicht der Basissatz für Ideale gilt.

Bemerkung. Alle bekannten Typen von H-Ringen lassen sich in der angegebenen Weise als Restklassenringe von Bewertungsringen beschreiben. Es ist eine offene Frage, ob dadurch die H-Ringe gekennzeichnet sind.

6.4. Angeordnete H-Ringe.

D24. Ein H-Ring $\boldsymbol{R}_H$ heißt *angeordnet*, wenn in $\boldsymbol{R}_H$ eine Menge $\boldsymbol{P}$ erklärt ist mit den Eigenschaften: 1. $\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P} \subseteq \boldsymbol{P}$. 2. $\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{P} \subseteq \boldsymbol{P}$. 3. $\boldsymbol{P} \cap -\boldsymbol{P} = 0$. 4. $\boldsymbol{P} \cup -\boldsymbol{P} = \boldsymbol{R}_H$[19]).

[19]) Dies ist eine Verallgemeinerung des Begriffs Anordnung von Integritätsbereichen auf Ringe mit Nullteilern, vgl. G. Pickert, Einführung in die Höhere Algebra. Göttingen 1951.

In der dritten Forderung von D 24 soll die 0 nicht die leere Menge bezeichnen, sondern das Nullelement von $\boldsymbol{R}_H$. Damit soll also der „Positivbereich" $\boldsymbol{P}$, im Unterschied zu Pickert, die Null enthalten. $\boldsymbol{P}$ hat nichts mit den Primidealen aus **6.3** zu tun.

Hier ist $-\boldsymbol{P}$ die Menge der mit -1 multiplizierten Elemente von $\boldsymbol{P}$. An Stelle von $a \in \boldsymbol{P}, a \neq 0$ schreiben wir auch $a > 0$ und nennen a positiv.

$\boldsymbol{R}_H$ heißt *archimedisch geordnet*, wenn $\boldsymbol{R}_H$ angeordnet ist und es zu $a > 0$ ein $b \in \boldsymbol{R}_H$ gibt mit $a\,b - 1 \geqq 0$.

S6.10. Ist $\boldsymbol{R}_H$ angeordnet, so folgt aus $a, b > 0$: $a + b > 0$, $a\,b \geqq 0$.

Dies folgt ebenso wie über einem Integritätsbereich.

S6.11. Ist $\boldsymbol{R}_H$ archimedisch geordnet, so ist $\boldsymbol{R}_H$ ein Körper[20]).

Wir müssen zeigen, daß $\boldsymbol{R}_H$ keine Nullteiler außer der Null enthalten kann: $a \in \boldsymbol{N}$, $a \neq 0$ bedeutet, daß es a' mit $a' \neq 0$, $a\,a' = 0$ gibt, wobei wir $a, a' > 0$ annehmen können. Da $\boldsymbol{R}_H$ archimedisch geordnet ist, gibt es b mit $a\,b - 1 \geqq 0$. Multiplikation mit a' liefert $-a' \geqq 0$, also $-a' > 0$, was wegen $a' > 0$ der Regel 3. in D24 widerspricht.

[20]) Dies ist der mathematische Kern einer schon von J. HJELMSLEV stammenden Bemerkung, J. HJELMSLEV[1]) 1. Mitt. S. 17: „Bei Annahme der Anordnungsaxiome und des Eudoxischen Axioms ist die Eindeutigkeit der geraden Linie durch zwei Punkte beweisbar.

Hamburg, Universität, Institut für Angewandte Mathematik.

(Eingegangen am 10. April 1954.)

Wielandt, H.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 407/408 (1954)

Zum Satz von Sylow.

Von
Helmut Wielandt.

In der Theorie der endlichen Gruppen kennt man den grundlegenden

Satz von Sylow [4]: (1) Es sei $\mathfrak{G}$ eine Gruppe der Ordnung g. (2) Es sei h ein Teiler von g, welcher zu g/h teilerfremd ist. (3) h sei eine Primzahlpotenz. Dann gilt: Jede Untergruppe von $\mathfrak{G}$, deren Ordnung ein Teiler von h ist, liegt in mindestens einer Untergruppe der Ordnung h von $\mathfrak{G}$; je zwei Untergruppen der Ordnung h sind in $\mathfrak{G}$ konjugiert.

Man verdankt P. Hall [2] die wichtige Erkenntnis, daß die Einschränkung (3) für h durch eine Voraussetzung über die Struktur von $\mathfrak{G}$ ersetzt werden kann: (3′) $\mathfrak{G}$ sei auflösbar. Im folgenden wird gezeigt, daß für nicht auflösbare Gruppen $\mathfrak{G}$ ein verwandter Satz gilt. Man darf nämlich (3) auch durch die folgende Voraussetzung ersetzen: (3″) $\mathfrak{G}$ enthalte eine nilpotente Gruppe (d.h. ein direktes Produkt von p-Gruppen) der Ordnung h. Dies besagt der

Satz: *Die Gruppe $\mathfrak{G}$ der Ordnung g enthalte eine nilpotente Untergruppe $\mathfrak{H}$, deren Ordnung h zu ihrem Index g/h teilerfremd ist. $\mathfrak{M}$ sei eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$, deren Ordnung m ein Teiler von h ist. Dann gibt es in $\mathfrak{G}$ ein Element G mit der Eigenschaft $\mathfrak{M} \subseteq G^{-1} \mathfrak{H} G$.*

Den Beweis stützen wir auf den

Hilfssatz: *Die Gruppe $\mathfrak{G}$ der Ordnung g enthalte eine nilpotente Untergruppe $\mathfrak{H}$, deren Ordnung h zu g/h teilerfremd ist. Die Primfaktorzerlegung von h sei $h = p^\alpha q^\beta \dots r^\nu$. Es sei $\mathfrak{P}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$, deren Ordnung eine Potenz p^ϱ der Primzahl p ist. $\mathfrak{G}^*$ sei der Normalisator von $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{G}$, seine Ordnung sei g^*. Dann enthält $\mathfrak{G}^*$ eine nilpotente Untergruppe $\mathfrak{H}^*$, für welche*

$$\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{H}^* \subseteq T^{-1} \mathfrak{H} T \quad \text{für ein passendes } T \in \mathfrak{G}$$

gilt und deren Ordnung die Form $h^* = p^\alpha q^\beta \dots r^\nu$ hat und zu g^*/h^* teilerfremd ist.

Beweis des Hilfssatzes. Wir bezeichnen die p-Sylowgruppe von $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{H}_p$; sie ist auch eine Sylowgruppe von $\mathfrak{G}$. Ferner bezeichnen wir mit $\mathfrak{G}_p^*$ eine p-Sylowgruppe von $\mathfrak{G}^*$ und mit p^π ihre Ordnung; es ist $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{G}_p^*$. Wir bestimmen nach Sylow ein $T \in \mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{G}_p^* \subseteq T^{-1} \mathfrak{H}_p T$ und setzen $\mathfrak{H}^* = T^{-1} \mathfrak{H} T \cap \mathfrak{G}^*$. Dann ist $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{H}^*$. Ferner ist $\mathfrak{H}^* \subseteq T^{-1} \mathfrak{H} T$, also ist $\mathfrak{H}^*$ nilpotent. Es ist nur noch die Behauptung über die Ordnung von $\mathfrak{H}^*$ nachzuprüfen, im einzelnen

$$h^* \mid p^\alpha q^\beta \dots r^\nu, \qquad p^\pi \mid h^*, \qquad p \nmid h^* p^{-\pi}, \qquad q^\beta \dots r^\nu \mid h^*.$$

Die ersten beiden Aussagen folgen aus $\mathfrak{H}^* \subseteq T^{-1} \mathfrak{H} T$ und $\mathfrak{G}_p^* \subseteq \mathfrak{H}^*$. Die dritte folgt daraus, daß $\mathfrak{G}_p^*$ eine p-Sylowgruppe von $\mathfrak{G}^*$ ist, und die vierte daraus,

daß $T^{-1}\mathfrak{H}T$ als nilpotente Obergruppe von $\mathfrak{P}$ eine Gruppe der Ordnung $q^{\beta}\dots r^{\nu}$ enthält, die sogar elementweise mit $\mathfrak{P}$ vertauschbar ist und daher gewiß in $\mathfrak{G}^*$, also auch in $\mathfrak{H}^*$ liegt.

Wir beweisen nun den oben ausgesprochenen Satz in zwei Schritten.

I. $\mathfrak{M}$ sei auflösbar. Dann schließen wir durch vollständige Induktion bezüglich g. Da der Satz für $g=1$ trivial ist (sogar für $m=1$), können wir $g>1$, sogar $m>1$ annehmen. Dann besitzt $\mathfrak{M}$ als auflösbare Gruppe einen minimalen Normalteiler $\mathfrak{P}$, dessen Ordnung eine Primzahlpotenz $p^{\varrho}>1$ ist; es gilt $p^{\varrho}\,|\,m\,|\,h$. Wie im Hilfssatz bezeichne $\mathfrak{G}^*$ den Normalisator von $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{G}$. Wenn $\mathfrak{G}^*=\mathfrak{G}$ ist, so ist $\mathfrak{P}$ ein gemeinsamer Normalteiler von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{H}$; dann können wir zu den Faktorgruppen nach $\mathfrak{P}$ übergehen und nach Induktionsvoraussetzung ein $G\in\mathfrak{G}$ mit der verlangten Eigenschaft finden. Wenn aber $\mathfrak{G}^*\neq\mathfrak{G}$ ist, so erfüllt $\mathfrak{G}^*$ zusammen mit der im Hilfssatz konstruierten Gruppe $\mathfrak{H}^*$ die Voraussetzungen des Satzes; dann gibt es nach Induktionsvoraussetzung ein $G^*\in\mathfrak{G}^*$ mit

$$\mathfrak{M}\subseteqq G^{*-1}\mathfrak{H}^*G^*\subseteqq(TG^*)^{-1}\mathfrak{H}(TG^*).$$

II. Wir beenden den Beweis des Satzes, indem wir durch einen Induktionsschluß nach m zeigen, daß $\mathfrak{M}$ stets auflösbar ist. Für $m=1$ ist nichts zu beweisen. Ist $m>1$, so wissen wir nach Induktionsvoraussetzung, daß jede echte Untergruppe $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{M}$ auflösbar ist. Nach I können wir schließen, daß $\mathfrak{N}$ zu einer Untergruppe von $\mathfrak{H}$ konjugiert und daher nilpotent ist. Es ist also jede echte Untergruppe von $\mathfrak{M}$ nilpotent, daher ist $\mathfrak{M}$ nach einem Satz von O. SCHMIDT ([3]; auch IWASAWA [1]) auflösbar.

Bemerkung. Es ist eine offene Frage, ob in dem Satz die Voraussetzung über die Struktur von $\mathfrak{H}$ abgeschwächt werden kann, ob es z.B. genügt, $\mathfrak{H}$ als überauflösbar vorauszusetzen (d.h. mit Primzahlen als Hauptindizes). Auflösbarkeit von $\mathfrak{H}$ genügt sicher nicht; denn wie P. HALL bemerkt hat ([2], S. 102), enthält die einfache Gruppe der Ordnung 7.24 zwei nicht konjugierte Untergruppen der Ordnung 24.

Literatur.

[1] IWASAWA, K.: Über die Struktur der endlichen Gruppen, deren echte Untergruppen sämtlich nilpotent sind. Proc. phys.-math. Soc. Japan (III) **23**, 1—4 (1941). — [2] HALL, P.: A note on soluble groups. J. London math. Soc. **3**, 98—105 (1928). — [3] SCHMIDT, O.: Über Gruppen, deren sämtliche Teiler spezielle Gruppen sind. Recueil math. Moscou **31**, 366—372 (1924). — [4] SYLOW, L.: Théorèmes sur les groupes de substitutions. Math. Ann. **5**, 584—594 (1873).

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 19. April 1954.)

Huppert, B.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 409—434 (1954)

Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen.

Von
Bertram Huppert.

Eine Kette von Normalteilern $\mathfrak{E} = \mathfrak{N}_0 < \mathfrak{N}_1 < \cdots < \mathfrak{N}_l = \mathfrak{G}$ von $\mathfrak{G}$ heißt eine Hauptreihe von $\mathfrak{G}$, wenn $\mathfrak{N}_{i+1}/\mathfrak{N}_i$ minimaler (von $\mathfrak{E}$ verschiedener) Normalteiler von $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}_i$ ist. Die Gruppen $\mathfrak{N}_{i+1}/\mathfrak{N}_i$ nennen wir Hauptfaktoren, ihre Ordnungen Hauptindizes von $\mathfrak{G}$. Für die Hauptreihen gilt das Analogon des Satzes von Jordan-Hölder, welches besagt, daß die Hauptfaktoren von zwei Hauptreihen abgesehen von der Anordnung isomorph sind (Speiser [*27*], S. 41). Die Hauptfaktoren sind charakteristisch einfach, also direkte Produkte von schlechthin einfachen Gruppen (Zassenhaus [*38*], S. 77). Ist die Gruppe $\mathfrak{G}$ auflösbar, so sind die Hauptfaktoren elementar abelsch, daher schon durch Angabe ihrer Ordnung völlig beschrieben.

Die Kompositionsreihen endlicher Gruppen sind schon früh betrachtet worden, sind sie doch mit dem Problem der Auflösung einer algebraischen Gleichung engstens verknüpft. Für rein gruppentheoretische Zwecke scheinen jedoch die Hauptreihen von größerer Bedeutung zu sein. Während alle Indizes einer Kompositionsreihe einer auflösbaren Gruppe Primzahlen sind, die auflösbaren Gruppen sich also durch ihre Kompositionsreihen nicht weiter klassifizieren lassen, liefern die Hauptreihen eine interessante Möglichkeit, die auflösbaren Gruppen in feinere Klassen einzuteilen. Die wichtigste und einfachste Klasse sind diejenigen Gruppen, deren sämtliche Hauptindizes Primzahlen sind. Diese Gruppen, welche wir im Anschluß an Zappa überauflösbar nennen wollen, bilden eine natürliche Verallgemeinerung der nilpotenten Gruppen. Auch im Falle, daß die Hauptindizes Primzahlen oder Primzahlquadrate sind, lassen sich einige Aussagen machen. Die Betrachtung von Gruppen mit höheren Primzahlpotenzen als Hauptindizes stößt auf Schwierigkeiten und erfordert in erster Linie die Kenntnis der auflösbaren Untergruppen der linearen Gruppen $GL(k, p)$[1]).

Neben den Normalteilern und Hauptreihen von $\mathfrak{G}$ betrachten wir die maximalen Untergruppen und die „Maximalketten" $\mathfrak{G} = \mathfrak{U}_0 > \mathfrak{U}_1 > \cdots > \mathfrak{U}_e = \mathfrak{E}$, wobei $\mathfrak{U}_{i+1}$ maximale Untergruppe von $\mathfrak{U}_i$ sei. Zwischen Hauptreihen und Maximalketten besteht bei auflösbaren Gruppen ein interessanter Zusammenhang (§ 1). Die Frage, welche Gruppen als maximale Untergruppen einer einfachen Gruppe auftreten können, scheint bisher nicht behandelt worden zu sein. In § 2 zeigen wir: Enthält $\mathfrak{G}$ eine maximale Untergruppe, welche nilpotent ist und nur reguläre Sylowgruppen hat (regulär im Sinne von

[1]) Bezeichnung nach v. d. Waerden [*30*], S. 5.

P. HALL [*10*]), so ist $\mathfrak{G}$ auflösbar. § 3 enthält Hilfssätze über Gruppen m nilpotenter Kommutatorgruppe. In § 4 untersuchen wir die schon erwähnte überauflösbaren Gruppen. Es folgen in § 5 Bemerkungen über Gruppen, dere Hauptindizes höhere Primzahlpotenzen sind. Für Gruppen mit lauter abe schen Sylowgruppen lassen sich zum Teil abschließende Resultate angeben (§ 6 § 7 enthält einen Satz über Gruppen mit lauter überauflösbaren eigentliche Untergruppen und Anwendungen auf Gruppen mit lauter invarianten zwei maximalen oder drittmaximalen Untergruppen.

Bezeichnungen. $(\mathfrak{G})$ = Ordnung von $\mathfrak{G}$ (alle auftretenden Gruppe sind endlich); $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ = Zentrum von $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{G}'$ = Kommutatorgruppe von $\mathfrak{G}$ ist p eine Primzahl, so sei $\mathfrak{G}_p$ eine p-Sylowgruppe von $\mathfrak{G}$; ist p^z die höchst p-Potenz, welche $(\mathfrak{G})$ teilt, so nennen wir eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$ vom Index p ein p-Komplement und bezeichnen p-Komplemente mit ${}_p\mathfrak{G}$; $\mathfrak{U} \leqq \mathfrak{G}$ bedeutet $\mathfrak{U}$ ist Untergruppe von $\mathfrak{G}$; ist $\mathfrak{U}$ eigentliche Untergruppe von $\mathfrak{G}$, so schreibe wir $\mathfrak{U} < \mathfrak{G}$; den Normalisator von $\mathfrak{U}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{N}(\mathfrak{U})$, den Zentral sator mit $\mathfrak{C}(\mathfrak{U})$; $\mathfrak{U} \lhd \mathfrak{G}$ bedeutet: $\mathfrak{U}$ ist Normalteiler von $\mathfrak{G}$ (entsprechen $\mathfrak{U} \lhd (\mathfrak{G})$; $\mathfrak{U} < \mathfrak{G}$: $\mathfrak{U}$ ist maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$; $\Phi(\mathfrak{G})$ = FRATTIN Gruppe von $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ = FITTING-Gruppe = maximaler nilpotenter Norma teiler von $\mathfrak{G}$; $GXG^{-1} = X^G$; $G\mathfrak{U}G^{-1} = \mathfrak{U}^G$; $(\mathfrak{G}:\mathfrak{U})$ sei der Index von $\mathfrak{U}$ in $\mathfrak{G}$ p und q bezeichnen stets Primzahlen; wir setzen $(X, Y) = XYX^{-1}Y^{-1}$ $(\mathfrak{U}, \mathfrak{V})$ sei die von allen (U, V) mit $U \in \mathfrak{U}$ und $V \in \mathfrak{V}$ erzeugte Untergruppe

§ 1. Hauptreihen und Maximalketten.

Der folgende Hilfssatz ist ein Spezialfall eines Satzes von R. BAER ([*I* S. 651). Der Beweis von BAER benutzt den Begriff des schwach hyperzentrale Normalteilers und ist das Ergebnis längerer Betrachtungen. Wir geben fü den uns hier allein interessierenden Fall einer auflösbaren Gruppe eine kurzen Beweis an.

Hilfssatz 1. *Sei $\mathfrak{G}$ auflösbar, $\mathfrak{N}$ ein minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Sei $\mathfrak{S}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$ mit der Eigenschaft $\mathfrak{G} = \mathfrak{C}(\mathfrak{N})\,\mathfrak{S}$. Ist $\mathfrak{S}$ minimal ge wählt, d.h. gilt für jede eigentliche Untergruppe $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{S}$ stets $\mathfrak{G} \neq \mathfrak{C}(\mathfrak{N})\,\mathfrak{T}$, so ist $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{E}$.*

Beweis. Wir führen den Beweis durch Induktion nach der Ordnung $(\mathfrak{G})$ von $\mathfrak{G}$.

Sei $\mathfrak{G} = \mathfrak{C}(\mathfrak{N})\,\mathfrak{S}$ mit minimalem $\mathfrak{S}$. Angenommen, es wäre $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{S} \neq \mathfrak{E}$. Dann ist $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{S}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Da $\mathfrak{N}$ minimaler Normalteiler ist folgt $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{N}$, also $\mathfrak{N} \leqq \mathfrak{S}$. Offenbar ist $\mathfrak{N}$ auch minimaler Normalteile von $\mathfrak{S}$. Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden:

a) Ist $\mathfrak{G} \neq \mathfrak{S}$, so können wir den Satz auf $\mathfrak{S}$ anwenden und erhalte $\mathfrak{S} = \mathfrak{C}_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{N})\,\mathfrak{T}$ mit $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{T} = \mathfrak{E}$, also $\mathfrak{T} \neq \mathfrak{S}$, wobei $\mathfrak{C}_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{N})$ der Zentralisator vo $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{S}$ ist. Wegen $\mathfrak{C}(\mathfrak{N}) \geqq \mathfrak{C}_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{N})$ folgt nun $\mathfrak{G} = \mathfrak{C}(\mathfrak{N})\,\mathfrak{S} = \mathfrak{C}(\mathfrak{N})\,\mathfrak{C}_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{N})\,\mathfrak{T} = \mathfrak{C}(\mathfrak{N})\,\mathfrak{T}$. Da aber $\mathfrak{T} \neq \mathfrak{S}$, so widerspricht dies der Wahl von $\mathfrak{S}$, womit ei Widerspruch gegen die Annahme $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{S} \neq \mathfrak{E}$ erreicht ist.

b) Ist $\mathfrak{S} = \mathfrak{G}$, so folgt, da $\mathfrak{S}$ minimal gewählt wurde, daß $\mathfrak{C}(\mathfrak{N})$ in der FRATTINI-Gruppe $\Phi(\mathfrak{G})$ von $\mathfrak{G}$ liegt. Als minimaler Normalteiler liegt $\mathfrak{N}$ im Zentrum der FITTING-Gruppe $\mathfrak{F}$ (s. BAER [1], S. 649), woraus sich $\mathfrak{F} \leq \mathfrak{C}(\mathfrak{N})$ ergibt. Wir erhalten damit $\mathfrak{F} \leq \Phi(\mathfrak{G})$. Dies ist aber bei auflösbaren Gruppen nicht möglich, wie leicht aus GASCHÜTZ [8], S. 165, Satz 10 folgt. Also kann auch der Fall b) nicht eintreten.

Definition 1. *Sei $\mathfrak{G}$ auflösbar und $p \mid (\mathfrak{G})$. Wir betrachten alle die Hauptindizes p^{α_i} von $\mathfrak{G}$, welche Potenzen der festen Primzahl p sind.* $\max_i \alpha_i = r_p(\mathfrak{G})$ *nennen wir den p-Hauptrang von $\mathfrak{G}$.* $\max_{p \mid (\mathfrak{G})} r_p(\mathfrak{G})$ *bezeichnen wir als Hauptrang von $\mathfrak{G}$.* Da in unserer Untersuchung kein anderer Rangbegriff auftritt, sprechen wir auch kurz vom p-Rang $r_p(\mathfrak{G})$ oder vom Rang $r(\mathfrak{G})$.

Einen Zusammenhang zwischen Hauptreihen und Maximalketten gibt Satz 1 an.

Satz 1. *Sei $\mathfrak{G}$ auflösbar. p^{j_p} sei die höchste p-Potenz, welche überhaupt in irgend einer Maximalkette von $\mathfrak{G}$ als Index auftritt. Dann ist $j_p = r_p(\mathfrak{G})$.*

Beweis. Zunächst eine Vorbemerkung: Ist $\mathfrak{U}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$, so erhalten wir durch Schnitt einer Hauptreihe von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{U}$ eine Kette von Normalteilern von $\mathfrak{U}$. Bei diesem Prozeß sind die Indizes sicher nicht größer geworden. Verfeinerung dieser Kette (nach Streichen gleicher Glieder) liefert eine Hauptreihe von $\mathfrak{U}$, deren Indizes also gewiß nicht größer sind als die Indizes einer Hauptreihe von $\mathfrak{G}$. Daher ist $r_p(\mathfrak{U}) \leq r_p(\mathfrak{G})$. Weiter sehen wir sofort, daß stets $r_p(\mathfrak{G}/\mathfrak{N}) \leq r_p(\mathfrak{G})$ gilt, denn eine Hauptreihe von $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ ist ein Stück einer Hauptreihe von $\mathfrak{G}$.

Nun beweisen wir Satz 1 durch Induktion nach $(\mathfrak{G})$.

a) Wir zeigen zunächst $r_p(\mathfrak{G}) \leq j_p(\mathfrak{G})$.

Sei $\mathfrak{N}$ ein minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Nach Hilfssatz 1 erlaubt $\mathfrak{G}$ eine Zerlegung $\mathfrak{G} = \mathfrak{C}(\mathfrak{N})\,\mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{E}$. Ist $(\mathfrak{N}) = q^\beta$ mit $q \neq p$, so haben wir gemäß der Induktionsannahme $r_p(\mathfrak{G}) = r_p(\mathfrak{G}/\mathfrak{N}) = j_p(\mathfrak{G}/\mathfrak{N}) \leq j_p(\mathfrak{G})$. Ist aber $p = q$, so können wir die eben gemachte Betrachtung auf den zu $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ gehörigen Teil der Hauptreihe von $\mathfrak{G}$ anwenden und haben nur noch $\beta \leq j_p(\mathfrak{G})$ zu zeigen. Wir legen eine Maximalkette durch $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}\,\mathfrak{N}$. Angenommen es sei $\beta > j_p(\mathfrak{G})$. Dann kann $\mathfrak{S}$ nicht maximale Untergruppe von $\mathfrak{S}\,\mathfrak{N}$ sein. Somit existiert eine Untergruppe $\mathfrak{S}\,\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{S}\,\mathfrak{N}$ mit $\mathfrak{E} < \mathfrak{M} < \mathfrak{N}$. Wegen $\mathfrak{M} = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{S}\,\mathfrak{M}$ ist $\mathfrak{M}$ invariant in $\mathfrak{S}\,\mathfrak{M}$. Als Untergruppe der abelschen Gruppe $\mathfrak{N}$ ist $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{N}$ und auch mit $\mathfrak{C}(\mathfrak{N})$ elementweise vertauschbar. Damit folgt $\mathfrak{M} \lhd \mathfrak{G}$. Dies ist ein Widerspruch, da $\mathfrak{N}$ minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist. Also gilt doch $\beta \leq j_p(\mathfrak{G})$, womit $r_p(\mathfrak{G}) \leq j_p(\mathfrak{G})$ bewiesen ist.

b) Nun haben wir noch $j_p(\mathfrak{G}) \leq r_p(\mathfrak{G})$ zu beweisen. Dies folgt leicht mittels Induktion unter Heranziehung der folgenden Tatsache: Ist $\mathfrak{N}$ ein minimaler Normalteiler der auflösbaren Gruppe $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{U} < \mathfrak{G}$, so gilt *entweder* $\mathfrak{N} \leq \mathfrak{U}$ *oder* $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{U} = \mathfrak{E}$ und $\mathfrak{G} = \mathfrak{U}\,\mathfrak{N}$. ($j_p(\mathfrak{G}) \leq r_p(\mathfrak{G})$ wird auch in ORE [23] bewiesen.)

Hilfssatz 2. *Seien $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Unter den Hauptfaktoren von $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}\cap\mathfrak{N}$ kommen keine anderen Gruppen vor als unter den Hauptfaktoren von $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$.*

Ein Spezialfall dieses Satzes wurde von uns schon an einer anderen Stelle erwähnt (HUPPERT [*13*]). Wir können auf den einfachen Beweis hier verzichten, da er sich von den früheren Betrachtungen nicht unterscheidet.

Zusatz. *Ist $\mathfrak{G}$ auflösbar, so erhalten wir aus Hilfssatz 2 $r_p(\mathfrak{G}/\mathfrak{M}\cap\mathfrak{N}) = \mathrm{Max}\{r_p(\mathfrak{G}/\mathfrak{M}), r_p(\mathfrak{G}/\mathfrak{N})\}$. Die gleiche Aussage gilt auch mit $r(\mathfrak{G})$ statt $r_p(\mathfrak{G})$.*

Aus dem Zusatz folgt sofort: Unter den Normalteilern $\mathfrak{N}$ mit $r(\mathfrak{G}/\mathfrak{N}) \leq k$ gibt es einen eindeutig bestimmten kleinsten.

§ 2. Maximale Untergruppen.

Satz 2. *Sei $\mathfrak{T}$ maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$. Ist $\mathfrak{T}$ nilpotent mit lauter regulären Sylowgruppen* (im Sinn von P. HALL [*10*]), *so ist $\mathfrak{G}$ auflösbar.*

Beweis. Wir beweisen den Satz durch Induktion nach $(\mathfrak{G})$. Da sich die Voraussetzung auf alle Faktorgruppen überträgt, genügt der Nachweis eines von $\mathfrak{E}$ verschiedenen auflösbaren Normalteilers von $\mathfrak{G}$.

Zunächst behandeln wir den Fall, daß $(\mathfrak{T})$ und $(\mathfrak{G}:\mathfrak{T})$ nicht teilerfremd sind. Sei p eine Primzahl mit $p\,|\,(\mathfrak{T})$ und $p\,|\,(\mathfrak{G}:\mathfrak{T})$. Die p-Sylowgruppe $\mathfrak{T}_p$ von $\mathfrak{T}$ habe die Ordnung p^x. Der Normalisator $\mathfrak{N}(\mathfrak{T}_p)$ von $\mathfrak{T}_p$ umfaßt $\mathfrak{T}$, und seine Ordnung ist nach einem bekannten Satz durch p^{x+1} teilbar. Daher ist $\mathfrak{N}(\mathfrak{T}_p)$ eine echte Obergruppe von $\mathfrak{T}$, also gilt $\mathfrak{N}(\mathfrak{T}_p) = \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{T}_p \lhd \mathfrak{G}$. Weiterhin können wir annehmen, daß $(\mathfrak{T})$ und $(\mathfrak{G}:\mathfrak{T})$ teilerfremd sind. Dann ist $\mathfrak{T}_p$ p-Sylowgruppe von $\mathfrak{G}$.

Ist p eine Primzahl mit $p\,|\,(\mathfrak{T})$ und $\mathfrak{N}(\mathfrak{T}_p) \neq \mathfrak{T}$, so haben wir $\mathfrak{N}(\mathfrak{T}_p) = \mathfrak{G}$, also $\mathfrak{T}_p \lhd \mathfrak{G}$, womit ein auflösbarer Normalteiler von $\mathfrak{G}$ gefunden ist. Wir können daher annehmen, daß $\mathfrak{N}(\mathfrak{T}_p) = \mathfrak{T}$ gilt für alle $p\,|\,(\mathfrak{T})$. Nach WIELANDT [*34*], Satz 5 existiert dann für jedes solche p ein Normalteiler $\mathfrak{N}_p$ von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}_p \cong \mathfrak{T}_p$. Setzen wir $\mathfrak{D} = \bigcap_p \mathfrak{N}_p$, so ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{D}\,\mathfrak{T}$ [wegen der Teilerfremdheit von $(\mathfrak{D})$ und $(\mathfrak{T})$].

Sei $q\,|\,(\mathfrak{D})$. Dann ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{D}\,\mathfrak{N}(\mathfrak{T}_q)$, also $\mathfrak{G}/\mathfrak{T} \cong \mathfrak{N}(\mathfrak{T}_q)/\mathfrak{N}(\mathfrak{T}_q)\cap\mathfrak{T} \sim \mathfrak{T}$. Wegen der Teilerfremdheit von $(\mathfrak{T})$ und $(\mathfrak{N}(\mathfrak{T}_q)\cap\mathfrak{T})$ gibt es nach einem Satz von ZASSENHAUS ([*38*], S. 125) eine Untergruppe $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{N}(\mathfrak{T}_q)$ mit $\mathfrak{N} \cong \mathfrak{T}$. Da Ordnung und Index von $\mathfrak{T}$ teilerfremd sind, $\mathfrak{T}$ nilpotent ist und $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{N}$ gleiche Ordnung haben, sind $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{G}$ konjugiert, also auch $\mathfrak{N} \lhd \mathfrak{G}$ (siehe WIELANDT [*35*]). Nun folgt $\mathfrak{N}(\mathfrak{T}_q) \supseteq \{\mathfrak{N}, \mathfrak{T}_q\} = \mathfrak{G}$, mithin $\mathfrak{T}_q \lhd \mathfrak{G}$. Damit ist Satz 2 bewiesen.

Ohne jede Voraussetzung über die Sylowgruppen von $\mathfrak{T}$ ist Satz 2 nicht richtig. Wie N. ITÔ in [*16*] bemerkt hat, enthält die lineare Gruppe $PSL(2, p)$ mit $p = 2^k - 1$ und $k \geq 4$ ihre 2-Sylowgruppen als maximale Untergruppen. Es ist eine offene Frage, ob Satz 2 für ein $\mathfrak{T}$ mit ungerader Ordnung ohne Einschränkung der Struktur der Sylowgruppen von $\mathfrak{T}$ noch richtig ist.

Satz 3. *Hat jede maximale Untergruppe von* $\mathfrak{G}$ *Primzahlindex, so ist* $\mathfrak{G}$ *auflösbar*[2]).

Beweis. Die Voraussetzung überträgt sich auf alle Faktorgruppen von $\mathfrak{G}$. Wir beweisen die Auflösbarkeit von $\mathfrak{G}$ durch Induktion nach $(\mathfrak{G})$. Zu jeder maximalen Untergruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{G}$ vom Index q erhalten wir eine Darstellung von $\mathfrak{G}$ als transitive Permutationsgruppe in q Symbolen, den Nebenklassen nach $\mathfrak{U}$. Bei dieser Darstellung wird ein Normalteiler $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{M} \leq \mathfrak{U}$ auf $\mathfrak{E}$ abgebildet. Ist keine dieser Darstellungen treu, so sind nach unserer Induktionsannahme alle die Faktorgruppen $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$ auflösbar. Ist $\mathfrak{D}$ der Durchschnitt aller der Normalteiler $\mathfrak{M}$, so ist $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ auflösbar, und $\mathfrak{D}$ liegt in der FRATTINI-Gruppe $\Phi(\mathfrak{G})$, ist daher auch auflösbar. Insgesamt folgt so die Auflösbarkeit von $\mathfrak{G}$.

Zu betrachten bleibt noch der Fall, daß $\mathfrak{G}$ eine treue Darstellung vom Primzahlgrad p besitzt. $\mathfrak{N}$ sei ein minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Dann ist $\mathfrak{N}$ direktes Produkt von isomorphen einfachen Gruppen. Da $(\mathfrak{N})$ durch p, aber nicht durch p^2 teilbar ist, muß $\mathfrak{N}$ einfach sein. $\mathfrak{N}$ enthält eine p-Sylowgruppe $\mathfrak{G}_p$ von $\mathfrak{G}$. Da alle Konjugierten von $\mathfrak{G}_p$ schon in $\mathfrak{N}$ konjugiert sind, haben wir $\mathfrak{G} = \mathfrak{N}(\mathfrak{G}_p)\,\mathfrak{N}$. Ist $\mathfrak{N}(\mathfrak{G}_p) \neq \mathfrak{G}$, so liegt $\mathfrak{N}(\mathfrak{G}_p)$ in einer maximalen Untergruppe $\mathfrak{V}$ von $\mathfrak{G}$, die einen Index $q \neq p$ hat. Setzen wir $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{V} = \mathfrak{L}$, so ist $(\mathfrak{N}) : (\mathfrak{L}) = (\mathfrak{G}) : (\mathfrak{V}) = q$. $\mathfrak{N}$ besitzt daher eine Darstellung als Permutationsgruppe vom Grad q, die wegen $q < p$ nicht treu sein kann. Somit ist $\mathfrak{N}$ nicht einfach, im Widerspruch zur obigen Feststellung. Daher muß $\mathfrak{N}(\mathfrak{G}_p) = \mathfrak{G}$ gelten und $\mathfrak{G}$ ist auflösbar.

§ 3. Gruppen mit nilpotenter Kommutatorgruppe.

Die Gruppen mit nilpotenter Kommutatorgruppe bilden eine wichtige Klasse von auflösbaren Gruppen. Neben den nilpotenten Gruppen gehören dazu die im nächsten Paragraphen betrachteten überauflösbaren Gruppen und die zweistufig metabelschen Gruppen. Wie wir bei anderer Gelegenheit zeigen werden, hat auch das Produkt von zwei abelschen Gruppen eine nilpotente Kommutatorgruppe.

Nach einem Satz von WIELANDT [33] ist eine Gruppe $\mathfrak{G}$ genau dann nilpotent, wenn $\mathfrak{G}' \leq \Phi(\mathfrak{G})$ gilt. Eine ganz ähnliche Charakterisierung der Gruppen mit nilpotenter Kommutatorgruppe wird uns mehrfach von Nutzen sein.

Hilfssatz 3. *Genau dann ist* $\mathfrak{G}'$ *nilpotent, wenn* $\mathfrak{G}''$ *in* $\Phi(\mathfrak{G})$ *liegt.*

Beweis. a) Sei $\mathfrak{G}'$ nilpotent. Nach WIELANDT [33] gilt dann $\mathfrak{G}'' \leq \Phi(\mathfrak{G}')$. Aus GASCHÜTZ [8], Satz 5 folgt $\Phi(\mathfrak{G}') \leq \Phi(\mathfrak{G})$, also $\mathfrak{G}'' \leq \Phi(\mathfrak{G})$.

b) Nun sei umgekehrt $\mathfrak{G}'' \leq \Phi(\mathfrak{G})$. Dann ist $\mathfrak{G}'/\mathfrak{G}' \cap \Phi(\mathfrak{G})$ nilpotent, und nach GASCHÜTZ [8], Satz 10 ergibt sich die Nilpotenz von $\mathfrak{G}'$.

Satz 4. *Sei* $\mathfrak{G}'$ *nilpotent.* $\mathfrak{H}$ *sei eine Untergruppe von* $\mathfrak{G}$, *deren Index und Ordnung teilerfremd sind. Dann ist* $\mathfrak{H}'$ *invariant in* $\mathfrak{G}$.

[2]) Diesen Satz verdankt der Verf. Herrn N. ITÔ und Herrn H. WIELANDT.

Beweis durch Induktion nach $(\mathfrak{G})$. Existiert eine Primzahl p mit $p \mid (\mathfrak{G}')$ und $p \nmid (\mathfrak{H})$, so hat $\mathfrak{G}$ einen in $\mathfrak{G}'$ gelegenen Normalteiler $\mathfrak{N}$, dessen Ordnung eine Potenz von p ist, etwa die p-Sylowgruppe von $\mathfrak{G}'$. Nach unserer Induktionsannahme folgt $\mathfrak{N}\,\mathfrak{H}' \lhd \mathfrak{G}$. Wegen $\mathfrak{N}\,\mathfrak{H}' \leq \mathfrak{G}'$ gilt $\mathfrak{N}\,\mathfrak{H}' = \mathfrak{N} \times \mathfrak{H}'$. Daher ist $\mathfrak{H}'$ charakteristische Untergruppe von $\mathfrak{N}\,\mathfrak{H}'$, ist also invariant in $\mathfrak{G}$. Gibt es jedoch keine Primzahl obiger Art, so haben wir $(\mathfrak{G}') \mid (\mathfrak{H})$ und daher $\mathfrak{G}' \leq \mathfrak{H}$. Dann ist sogar $\mathfrak{H}$ invariant in $\mathfrak{G}$, und $\mathfrak{H}'$ erst recht.

Unter den Voraussetzungen von Satz 4 sind insbesondere die Kommutatorgruppen der Sylowgruppen von $\mathfrak{G}$ invariant. Das direkte Produkt $\prod_{p \mid (\mathfrak{G})} \mathfrak{G}_p'$ ist daher ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$, dessen Faktorgruppe eine auflösbare Gruppe mit lauter abelschen Sylowgruppen ist.

Satz 5. *Sei $\mathfrak{G}'$ nilpotent. Die p-Sylowgruppe der* FRATTINI-*Gruppe $\Phi(\mathfrak{G})$ von $\mathfrak{G}$ ist dann der Durchschnitt der* FRATTINI-*Gruppen aller p-Sylowgruppen von $\mathfrak{G}$.*

Beweis. Wir setzen $\mathfrak{D} = \bigcap_{x \in \mathfrak{G}} \Phi(\mathfrak{G}_p^x)$. Unsere Behauptung lautet $\mathfrak{D} = \Phi_p(\mathfrak{G})$.

a) $\mathfrak{D}$ ist Normalteiler von $\mathfrak{G}$ und liegt in $\Phi(\mathfrak{G}_p)$. Nach GASCHÜTZ [8], Satz 5 folgt $\mathfrak{D} \leq \Phi_p(\mathfrak{G})$.

b) Nun müssen wir noch $\Phi_p(\mathfrak{G}) \leq \mathfrak{D}$ nachweisen. Dazu führen wir eine Induktion nach $(\mathfrak{G})$ durch.

Liegt $\mathfrak{G}'$ nicht in jeder p-Sylowgruppe $\mathfrak{G}_p$ von $\mathfrak{G}$, so enthält $\mathfrak{G}'$ einen Normalteiler $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$ von zu p teilerfremder Ordnung. Die Induktionsannahme liefert uns $\Phi_p(\mathfrak{G}/\mathfrak{N}) \leq \Phi(\mathfrak{G}_p)\,\mathfrak{N}/\mathfrak{N}$. Nun gilt aber $\Phi(\mathfrak{G}/\mathfrak{N}) \geq \Phi(\mathfrak{G})\,\mathfrak{N}/\mathfrak{N}$ (GASCHÜTZ [8], S. 162), also, auch $\Phi_p(\mathfrak{G}/\mathfrak{N}) \geq \Phi_p(\mathfrak{G})\,\mathfrak{N}/\mathfrak{N}$. Es folgt somit $\Phi_p(\mathfrak{G}) \leq \Phi(\mathfrak{G}_p)\,\mathfrak{N}$. Wegen $p \nmid (\mathfrak{N})$ haben wir sogar $\Phi_p(\mathfrak{G}) \leq \Phi(\mathfrak{G}_p)$. Dies ist richtig für jede p-Sylowgruppe $\mathfrak{G}_p$ von $\mathfrak{G}$, womit $\Phi_p(\mathfrak{G}) \leq \mathfrak{D}$ nachgewiesen ist.

Zu behandeln bleibt noch der Fall, daß $\mathfrak{G}'$ in $\mathfrak{G}_p$ liegt, $\mathfrak{G}_p$ also in $\mathfrak{G}$ invariant ist. Dann folgt sofort $\Phi(\mathfrak{G}_p) \leq \Phi(\mathfrak{G})$. Zu zeigen haben wir $\Phi(\mathfrak{G}_p) = \Phi_p(\mathfrak{G})$. Dazu betrachten wir $\overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G}_p)$. Die Sylowgruppe $\overline{\mathfrak{G}}_p$ von $\overline{\mathfrak{G}}$ ist wegen $\Phi(\overline{\mathfrak{G}}_p) = \mathfrak{E}$ elementar abelsch. Zu zeigen ist nun $\Phi_p(\overline{\mathfrak{G}}) = \mathfrak{E}$, d.h. wir müssen nachweisen, daß $\overline{\mathfrak{G}}$ keinen Normalteiler von p-Potenzordnung besitzt, der in jeder maximalen Untergruppe von $\overline{\mathfrak{G}}$ liegt. Angenommen, es gebe doch einen Normalteiler mit diesen Eigenschaften. Sei $\mathfrak{R}$ ein minimaler. Fassen wir $\overline{\mathfrak{G}}_p$ als einen Modul mit einem p-Komplement ${}_p\overline{\mathfrak{G}}$ (ein solches existiert nach HALL [9] für auflösbare Gruppen stets) von $\overline{\mathfrak{G}}$ als Operatorenbereich auf, so enthält $\overline{\mathfrak{G}}_p$ den invarianten Teilmodul $\mathfrak{R}$, ist also halbreduzibel und dann nach der SCHURschen Erweiterung des Satzes von MASCHKE (v. D. WAERDEN [29], S. 182) auch vollreduzibel. Es gibt daher einen Normalteiler $\mathfrak{M}$ von $\overline{\mathfrak{G}}$ mit $\mathfrak{R} \times \mathfrak{M} = \overline{\mathfrak{G}}_p$. Dann ist ${}_p\overline{\mathfrak{G}}\,\mathfrak{M}$ eine maximale Untergruppe von $\overline{\mathfrak{G}}$; denn wäre ${}_p\overline{\mathfrak{G}}\,\mathfrak{L}$ eine echte Obergruppe von ${}_p\overline{\mathfrak{G}}\,\mathfrak{M}$, so wäre $\mathfrak{L}$ Normalteiler von $\overline{\mathfrak{G}}$ und hätte wegen $\overline{\mathfrak{G}}_p = \mathfrak{R} \times \mathfrak{M}$ die Gestalt $\tilde{\mathfrak{R}} \times \mathfrak{M}$ mit $\tilde{\mathfrak{R}} \neq \mathfrak{E}$. Dann müßte auch $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{R} = \{\tilde{\mathfrak{R}} \times \mathfrak{M}\} \cap \mathfrak{R} = \tilde{\mathfrak{R}}$ ein Normalteiler von $\overline{\mathfrak{G}}$ sein. Da aber $\mathfrak{R}$ minimaler Normalteiler ist, folgt $\tilde{\mathfrak{R}} = \mathfrak{E}$, und ${}_p\overline{\mathfrak{G}}\,\mathfrak{M}$ ist doch maximale Untergruppe von $\overline{\mathfrak{G}}$. ${}_p\overline{\mathfrak{G}}\,\mathfrak{M}$ enthält aber $\mathfrak{R}$ nicht, im Widerspruch zu unserer Annahme. Damit ist Satz 5 bewiesen.

Definition 2. *$\mathfrak{G}$ heißt eine Gruppe mit Sylowturm, wenn in $\mathfrak{G}$ und in jeder Faktorgruppe von $\mathfrak{G}$ mindestens eine Sylowgruppe invariant ist.*

Ist $\mathfrak{G}$ eine Gruppe mit Sylowturm, so lassen sich die voneinander verschiedenen Primteiler p_i von $(\mathfrak{G})$ in eine solche Reihenfolge $p_1, p_2, \ldots, p_k$ bringen, daß für $i = 1, \ldots, k$ stets $\mathfrak{G}_{p_1} \ldots \mathfrak{G}_{p_i}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist. Besonders wichtig ist der Spezialfall $p_1 > p_2 > \cdots > p_k$. Dann sprechen wir von einem geordneten Sylowturm.

Beim Beweis von Satz 5 hatten wir nur benutzt, daß die folgende Eigenschaft für $\mathfrak{G}$ und alle Faktorgruppen von $\mathfrak{G}$ erfüllt ist: Ist $(\mathfrak{F}) = p^\alpha$, so gilt $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_p$. Dies trifft offenbar für Gruppen mit Sylowturm zu. Es ist auch für auflösbare Gruppen mit lauter abelschen Sylowgruppen richtig: Denn aus $\mathfrak{G}_p \leq \mathfrak{C}(\mathfrak{F}) \leq \mathfrak{F}$ folgt $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_p$. Also gilt Satz 5 auch für Gruppen mit Sylowturm und auflösbare Gruppen mit lauter abelschen Sylowgruppen.

§ 4. Überauflösbare Gruppen.

Definition 3. *Die Gruppen vom Hauptrang 1 nennen wir überauflösbar* (s. auch Zappa [36]).

Der folgende Satz ist bekannt (Itô [14] und Ore [23]), ergibt sich aber aus unseren bisherigen Überlegungen sehr einfach:

Satz 6. *Genau dann ist $\mathfrak{G}$ überauflösbar, wenn in jeder Maximalkette alle Indizes Primzahlen sind.*

Beweis. Ist $\mathfrak{G}$ überauflösbar, so sind nach Satz 1 die Indizes in jeder Maximalkette Primzahlen. Sind umgekehrt alle Indizes in den Maximalketten Primzahlen, so ist $\mathfrak{G}$ nach Satz 3 auflösbar und dann nach Satz 1 überauflösbar.

Der Vollständigkeit halber beweisen wir noch

Satz 7. *Jede überauflösbare Gruppe besitzt einen geordneten Sylowturm.*

(Dieser Satz ist bekannt; s. etwa Hall [9].)

Beweis durch Induktion nach $(\mathfrak{G})$. Sei $\mathfrak{N}$ ein minimaler Normalteiler der überauflösbaren Gruppe $\mathfrak{G}$ mit $(\mathfrak{N}) = q$, p der maximale Primteiler von $(\mathfrak{G})$. Aus der Richtigkeit des Satzes für die Gruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ folgt $\mathfrak{N}\,\mathfrak{G}_p \leq \mathfrak{G}$. Ist $q = p$, so haben wir $\mathfrak{G}_p \leq \mathfrak{G}$. Ist jedoch $q < p$, so gilt, da die Ordnung der Automorphismengruppe von $\mathfrak{N}$ nur Primteiler $\leq q - 1$ enthält, $\mathfrak{G}_p\,\mathfrak{N} = \mathfrak{N} \times \mathfrak{G}_p$ und dann auch $\mathfrak{G}_p \lhd \mathfrak{G}$. Leicht folgt nun die volle Behauptung.

Satz 8. *Haben alle maximalen Untergruppen von $\mathfrak{G}$ Primzahlindex, so ist die Kommutatorgruppe $\mathfrak{G}'$ nilpotent.*

Beweis. Sei $\mathfrak{U} < \mathfrak{G}$ mit $(\mathfrak{G} : \mathfrak{U}) = p$. Stellen wir $\mathfrak{G}$ dar als Permutationsgruppe der Nebenklassen nach $\mathfrak{U}$, so erhalten wir eine transitive Permutationsgruppe vom Primzahlgrad p. Nach Satz 3 ist $\mathfrak{G}$ auflösbar. Eine auflösbare und transitive Permutationsgruppe vom Primzahlgrad ist bekanntlich metabelsch (s. etwa Perron [24], S. 151). Ist $\mathfrak{N}$ der bei der betrachteten Darstellung auf $\mathfrak{E}$ abgebildete Normalteiler von $\mathfrak{G}$, so haben wir demnach $\mathfrak{G}'' \leq \mathfrak{N} \leq \mathfrak{U}$. Die zweite Kommutatorgruppe $\mathfrak{G}''$ liegt also in jeder maximalen Untergruppe und somit auch in $\Phi(\mathfrak{G})$. Nun folgt aus Hilfssatz 3 unsere Behauptung.

Speziell enthält Satz 8 die Aussage, daß die Kommutatorgruppe einer überauflösbaren Gruppe nilpotent ist. Dies wurde schon 1902 von E. WENDT bewiesen (WENDT [31]; einen sehr einfachen Beweis gab ORE in [23]). Wir werden bald sehen, daß jede Gruppe mit der in Satz 8 vorausgesetzten Eigenschaft überauflösbar ist.

Eine endliche Gruppe ist bekanntlich genau dann nilpotent, wenn alle maximalen Untergruppen invariant sind. Insbesondere haben in diesem Fall alle maximalen Untergruppen Primzahlindex. Somit bilden diejenigen Gruppen, deren sämtliche maximalen Untergruppen Primzahlindex haben, eine Oberklasse der nilpotenten Gruppen. Diese Klasse enthält nach Satz 3 nur auflösbare Gruppen und gemäß Satz 6 alle überauflösbaren Gruppen. Überraschend ist

Satz 9. *Genau dann ist $\mathfrak{G}$ überauflösbar, wenn alle maximalen Untergruppen Primzahlindex haben.*

Dem Beweis von Satz 9 schicken wir einige Betrachtungen voraus:

Wir führen noch einen weiteren Rangbegriff ein, der für manche Zwecke brauchbarer ist als Definition 1.

Definition 4[3]). *Die Zahlen $p_i^{\alpha_i}$ seien die Hauptindizes der auflösbaren Gruppe $\mathfrak{G}$. Das kleinste gemeinsame Vielfache der α_i nennen wir den arithmetischen Rang $\bar{r}(\mathfrak{G})$ von $\mathfrak{G}$.*

[$\bar{r}(\mathfrak{G}) = 1$ und $r(\mathfrak{G}) = 1$ sind also gleichwertig; ebenso $\bar{r}(\mathfrak{G}) = 2$ und $r(\mathfrak{G}) = 2$.]

Hilfssatz 4. a) *Sei $\mathfrak{A}$ eine abelsche Gruppe, $\Gamma(\mathfrak{A})$ eine über dem Galois-Feld $GF(p)$ irreduzible Darstellung von $\mathfrak{A}$. Dann ist $\Gamma(\mathfrak{A})$ zyklisch.*

b) *Eine Matrix A von zu p teilerfremder Ordnung mit Elementen aus $GF(p)$ ist genau dann über $GF(p)$ irreduzibel, wenn ihr charakteristisches Polynom $\varphi(x)$ in $GF(p)[x]$ irreduzibel ist.*

Beweis. a) Sei $\mathfrak{m}$ der Darstellungsmodul zu $\Gamma(\mathfrak{A})$. Wir suchen nun die erlaubten Endomorphismen von $\mathfrak{m}$ auf, d.h. die mit $\Gamma(\mathfrak{A})$ vertauschbaren linearen Abbildungen von $\mathfrak{m}$ in sich. Diese bilden wegen der Irreduzibilität von $\mathfrak{m}$ einen Schiefkörper (v. d. WAERDEN [29], S. 154), der überdies endlich ist, also ein GALOIS-Feld. Da $\Gamma(\mathfrak{A})$ abelsch ist, sind auch die Matrizen von $\Gamma(\mathfrak{A})$ erlaubte Endomorphismen. $\Gamma(\mathfrak{A})$ ist demnach isomorph zu einer Untergruppe der multiplikativen Gruppe eines GALOIS-Feldes, ist also zyklisch.

b) Wegen $p \nmid$ Ordnung A läßt sich A in einem geeigneten Erweiterungskörper von $GF(p)$ auf Diagonalgestalt transformieren.

Sei zunächst $\varphi(x)$ über $GF(p)$ irreduzibel. Wäre A über $GF(p)$ reduzibel, also $A^S = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B & A_2 \end{pmatrix}$ (mit geeigneter Matrix S), und wären die $\varphi_i(x)$ die charakteristischen Polynome der A_i, so würde folgen $\varphi(x) = \varphi_1(x)\,\varphi_2(x)$, entgegen der Annahme. Also ist bei irreduziblem $\varphi(x)$ die Matrix A irreduzibel.

[3]) Diese Definition und die beiden folgenden Hilfssätze gehen auf eine Anregung von Herrn WIELANDT zurück. Der ursprüngliche Beweis des Verf. für Satz 9 war wesentlich umständlicher.

Nun sei umgekehrt A irreduzibel. Angenommen, $\varphi(x)$ wäre über $GF(p)$ reduzibel, $\varphi(x) = \varphi_1(x) \dots \varphi_k(x)$ mit irreduziblen $\varphi_i(x)$. Wegen der Vollkommenheit von $GF(p)$ haben die $\varphi_i(x)$ keine mehrfachen Wurzeln. Die A_i seien Begleitmatrizen zu den $\varphi_i(x)$ (v. d. Waerden [29], S. 123). Da die A_i lauter verschiedene Eigenwerte haben, ließe sich $\bar{A} = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k \end{pmatrix}$ auf die gleiche Diagonalgestalt bringen wie A. Wir hätten dann $A^S = \bar{A}$ mit einer geeigneten Matrix S. Nach v. d. Waerden [30], S. 70 könnte S sogar mit Elementen aus $GF(p)$ gewählt werden. Dies widerspräche der Annahme, daß A irreduzibel ist. Also muß $\varphi(x)$ über $GF(p)$ irreduzibel sein.

Hilfssatz 5. *Ist $\mathfrak{G}'$ nilpotent, so gilt $\bar{r}(\mathfrak{G}) = \bar{r}\left(\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G})\right)$.*

Beweis durch Induktion nach $(\mathfrak{G})$.

a) Sei $\mathfrak{F}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{F}_{p_1} \times \mathfrak{F}_{p_2} \times \cdots$ mit $\mathfrak{F}_{p_1} \neq \mathfrak{E} \neq \mathfrak{F}_{p_2}$. Wegen $\Phi(\mathfrak{G}/\mathfrak{F}_{p_i}) \geq \Phi(\mathfrak{G})\,\mathfrak{F}_{p_k}/\mathfrak{F}_{p_i}$ folgt aus der Induktionsannahme

$$\bar{r}(\mathfrak{G}/\mathfrak{F}_{p_i}) = \bar{r}\left(\mathfrak{G}/\mathfrak{F}_{p_i}/\Phi(\mathfrak{G}/\mathfrak{F}_{p_i})\right) \leq \bar{r}\left(\mathfrak{G}/\mathfrak{F}_{p_i}/\Phi(\mathfrak{G})\,\mathfrak{F}_{p_i}/\mathfrak{F}_{p_i}\right)$$
$$= \bar{r}\left(\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G})\,\mathfrak{F}_{p_i}\right) \leq \bar{r}\left(\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G})\right).$$

Mit Hilfssatz 2 erhalten wir $\bar{r}(\mathfrak{G}) = \bar{r}(\mathfrak{G}/\mathfrak{F}_{p_1} \cap \mathfrak{F}_{p_2}) \leq \bar{r}\left(\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G})\right)$. Wegen $\bar{r}(\mathfrak{G}) \geq \bar{r}\left(\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G})\right)$ ist damit die Behauptung bewiesen.

b) Nun sei $(\mathfrak{F}) = p^x$. Da $\mathfrak{G}'$ nilpotent ist, haben wir $\mathfrak{G}' \leq \mathfrak{F}$. Daraus folgt $\mathfrak{G}_p \mid \mathfrak{G}$, also $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_p$. Jedes p-Komplement ${}_p\mathfrak{G}$ ist abelsch. Wegen $\Phi(\mathfrak{G}) < \mathfrak{F}$ und Satz 5 ist $\Phi(\mathfrak{G}) = \Phi(\mathfrak{G}_p)$. Nun betrachten wir die von einem p-Komplement ${}_p\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{G}_p/\Phi(\mathfrak{G}_p)$ induzierten Automorphismen und fassen dabei $\mathfrak{G}_p/\Phi(\mathfrak{G}_p)$ als Darstellungsmodul für ${}_p\mathfrak{G}$ auf. Ein Automorphismus, der $\mathfrak{G}_p/\Phi(\mathfrak{G}_p)$ elementweise fest läßt, hat zur Ordnung eine Potenz von p (Zassenhaus [38], S. 45). Da $\mathfrak{G}_p = \mathfrak{F}$ seinen Zentralisator enthält (Fitting [6], S. 105), so ist die Darstellung von ${}_p\mathfrak{G}$ treu. Die irreduziblen Teilmoduln von $\mathfrak{G}_p/\Phi(\mathfrak{G}_p)$ haben Dimensionen ϱ_i mit $\varrho_i \mid \bar{r} = \bar{r}\left(\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G})\right)$. Nach Hilfssatz 4 genügen die Eigenwerte der Matrizen, welche den Elementen aus ${}_p\mathfrak{G}$ zugeordnet sind, irreduziblen Gleichungen der Grade ϱ_i, liegen also alle in $GF(p^{\bar{r}})$. Daraus folgt $A^{p^{\bar{r}}-1} = E$ für alle $A \neq {}_p\mathfrak{G}$. Nun verfeinern wir die absteigende Zentralreihe von $\mathfrak{G}_p$ zu einer charakteristischen Reihe von $\mathfrak{G}_p$. Auf jeder Faktorgruppe dieser Reihe erfährt ${}_p\mathfrak{G}$ eine Darstellung. Sei $\Gamma = \{B\}$ ein irreduzibler Anteil, der nach Hilfssatz 4 zyklisch ist. Die Eigenwerte von B liegen wegen $B^{p^{\bar{r}}-1} = E$ in $GF(p^{\bar{r}})$, genügen daher über $GF(p)$ einer irreduziblen Gleichung von einem Grad σ mit $\sigma \mid \bar{r}$. Nach Hilfssatz 4 folgt Grad $\Gamma = \sigma \mid \bar{r}$. Damit ist $\bar{r}(\mathfrak{G}) = \bar{r}\left(\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G})\right)$ bewiesen.

Beweis von Satz 9. Wir führen eine Induktion nach $(\mathfrak{G})$ durch.

a) Ist $\Phi(\mathfrak{G}) \neq \mathfrak{E}$, so haben wir nach Induktionsannahme $r\left(\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G})\right) = 1 = \bar{r}\left(\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G})\right)$. Daraus folgt mit Hilfssatz 5 unter Beachtung von Satz 8 die Behauptung $r(\mathfrak{G}) = \bar{r}(\mathfrak{G}) = 1$.

b) Ist aber $\Phi(\mathfrak{G}) = \mathfrak{E}$, so liegt ein minimaler Normalteiler $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$ nicht in jeder maximalen Untergruppe von $\mathfrak{G}$. Sei also $\mathfrak{N} \not\leqq \mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U} < \mathfrak{G}$ mit $(\mathfrak{G}:\mathfrak{U}) = p$. Dann ist $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{U} = \mathfrak{E}$ und $\mathfrak{G} = \mathfrak{N}\,\mathfrak{U}$, also $(\mathfrak{N}) = (\mathfrak{G}:\mathfrak{U}) = p$. Durch Anwendung der Induktionsannahme auf $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ folgt die Behauptung.

Aus Satz 9 ziehen wir nun zwei einfache Folgerungen:

Satz 10. *Ist* $\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G})$ *überauflösbar, so auch* $\mathfrak{G}$.

Beweis. Ist $\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G})$ überauflösbar, so haben nach Satz 6 alle maximalen Untergruppen von $\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G})$ Primzahlindex. Den maximalen Untergruppen von $\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G})$ entsprechen umkehrbar eindeutig mit Indexerhaltung die maximalen Untergruppen von $\mathfrak{G}$, welche also auch alle Primzahlindex haben. Aus Satz 9 folgt nun die Überauflösbarkeit von $\mathfrak{G}$.

Satz 11. *Sei* $\mathfrak{M}$ *eine Menge von Gruppen mit den folgenden drei Eigenschaften*:

1. *Ist* $\mathfrak{G} \in \mathfrak{M}$, *so sei auch jede Untergruppe von* $\mathfrak{G}$ *in* $\mathfrak{M}$.
2. *Mit* $\mathfrak{G}$ *liegt auch jede Faktorgruppe* $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ *von* $\mathfrak{G}$ *in* $\mathfrak{M}$.
3. *Ist* $\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G})$ *in* $\mathfrak{M}$, *so auch* $\mathfrak{G}$.

Sei nun $\mathfrak{G}/\mathfrak{N} \in \mathfrak{M}$ *und* $\mathfrak{G} = \mathfrak{N}\,\mathfrak{U}$ *mit minimal gewähltem* $\mathfrak{U}$. *Dann gilt* $\mathfrak{U} \in \mathfrak{M}$.

Beweis durch Induktion nach $(\mathfrak{G})$. Liegt $\mathfrak{N}$ in $\Phi(\mathfrak{G})$, so gehört $\mathfrak{G}$ selbst zu $\mathfrak{M}$, und der Satz ist klar. Ist aber $\mathfrak{N} \not\leqq \Phi(\mathfrak{G})$, so ist $\mathfrak{G} \neq \mathfrak{U}$ wegen der minimalen Wahl von $\mathfrak{U}$. Es ist $\mathfrak{G}/\mathfrak{N} \cong \mathfrak{U}/\mathfrak{U} \cap \mathfrak{N}$. Nach unserer Induktionsannahme haben wir $\mathfrak{U} = \{\mathfrak{U} \cap \mathfrak{N}\}\,\mathfrak{T}$ mit $\mathfrak{T} \in \mathfrak{M}$. Daraus folgt $\mathfrak{G} = \mathfrak{N}\,\{\mathfrak{U} \cap \mathfrak{N}\}\,\mathfrak{T} = \mathfrak{N}\,\mathfrak{T}$. Da $\mathfrak{U}$ minimal gewählt war, ist $\mathfrak{U} = \mathfrak{T} \in \mathfrak{M}$.

Als $\mathfrak{M}$ können wir wählen die Menge der auflösbaren, der nilpotenten[4]) oder der überauflösbaren Gruppen. Daß die nilpotenten Gruppen eine Menge mit obigen Eigenschaften bilden, steht bei GASCHÜTZ [8], S. 165); daß die überauflösbaren Gruppen eine solche Menge bilden, folgt aus Satz 10.

Satz 11 hat ein gewisses Interesse für die Erweiterungstheorie. Zwar ist es nicht immer möglich, zu Normalteilern $\mathfrak{N}$ mit den angegebenen Eigenschaften „Vertretergruppen" $\mathfrak{U}$ mit $\mathfrak{G} = \mathfrak{N}\,\mathfrak{U}$ *und* $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{U} = \mathfrak{E}$ zu finden; aber $\mathfrak{N}$ besitzt ein „partial complement" im Sinne von P. HALL [12], welches mit der Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ wesentliche Eigenschaften (Auflösbarkeit, Nilpotenz, Überauflösbarkeit) gemeinsam hat.

Satz 10 legt die Frage nahe, ob allgemein $r\big(\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G})\big) = r(\mathfrak{G})$ gilt. Diese Frage ist zu verneinen, wie wir durch ein Beispiel zeigen:

Beispiel 1. Die Gruppe $\mathfrak{P}$ werde erzeugt von den vier Elementen P_1, P_2, P_3, P_4. In $\mathfrak{P}$ mögen die folgenden Regeln gelten: $X^3 = E$, $\big(X, (Y, Z)\big) = E$. $\mathfrak{P}$ hat die Ordnung 3^{10} (s. LEVI u. v. d. WAERDEN [21]).

Wir bilden das Holomorph von $\mathfrak{P}$ mit einer geeigneten Automorphismengruppe $\mathfrak{A}$. Diejenigen Automorphismen aus $\mathfrak{A}$, welche in $\mathfrak{P}/\mathfrak{P}'$ den identischen Automorphismus bewirken, bilden einen Normalteiler $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$. Wir geben

[4]) Für den Fall nilpotenter Gruppen $\mathfrak{G}\,\mathfrak{N}$ wurde dieser Satz von BAER angegeben; BAER [2], S. 37.

nun die $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}$ durch ihre Wirkung auf die P_i an: Es sei

$$P_1^{\mathfrak{a}} = P_1^{\alpha_{11}} P_2^{\alpha_{12}}, \qquad P_2^{\mathfrak{a}} = P_1^{\alpha_{21}} P_2^{\alpha_{22}}, \qquad P_3^{\mathfrak{a}} = P_3^{\overline{\alpha_{11}}} P_4^{\overline{\alpha_{12}}}, \qquad P_4^{\mathfrak{a}} = P_3^{\overline{\alpha_{21}}} P_4^{\overline{\alpha_{22}}},$$

wobei die α_{ik} und $\overline{\alpha_{ik}}$ nur den Nebenbedingungen $\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} \not\equiv 0 \ (3)$ und $\overline{\alpha_{11}}\,\overline{\alpha_{22}} - \overline{\alpha_{12}}\,\overline{\alpha_{21}} \not\equiv 0 \ (3)$ unterliegen sollen. (Diese sind nötig, damit es sich überhaupt um Automorphismen handelt.)

Offenbar gilt $\mathfrak{A}/\mathfrak{B} \cong GL(2, 3) \times GL(2, 3)$, also $r(\mathfrak{A}/\mathfrak{B}) = 2$. Die $\mathfrak{a}$ setzen sich auf die von den Kommutatoren $C_{ik} = (P_i, P_k)$ erzeugte elementar abelsche Gruppe $\mathfrak{P}' = \Phi(\mathfrak{P})$ fort, und zwar in der folgenden Weise:

$$C_{12}^{\mathfrak{a}} = C_{12}^{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}}, \qquad C_{34}^{\mathfrak{a}} = C_{34}^{\overline{\alpha_{11}}\,\overline{\alpha_{22}} - \overline{\alpha_{12}}\,\overline{\alpha_{21}}};$$

die restlichen C_{ik} werden in Produkte dieser C_{ik} abgebildet, wobei die auftretenden Exponenten die Matrixelemente des KRONECKER-Produktes der beiden Matrizen (α_{ik}) und $(\overline{\alpha_{ik}})$ sind. Dieses KRONECKER-Produkt ist eine absolut irreduzible Darstellung von $GL(2, 3) \times GL(2, 3)$ (s. WEYL [32], S. 127). Daher ist die von C_{13}, C_{14}, C_{23} und C_{24} erzeugte Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ein minimaler Normalteiler, woraus $r(\mathfrak{G}) \geqq 4$ folgt.

Wir behaupten nun, daß $r\big(\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{P})\big) \leqq 2$ gilt. Wegen $\Phi(\mathfrak{P}) \leqq \Phi(\mathfrak{G})$ ist dann auch $r\big(\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G})\big) \leqq 2$.

Sei $\mathfrak{b} \in \mathfrak{B}$. Dann ist $P_1^{\mathfrak{b}} = P_1 \bmod \mathfrak{P}'$ und $P_1^{\mathfrak{b}} \in \{P_1, P_2\}$, da $\{P_1, P_2\}$ bei $\mathfrak{A}$ invariant ist. Also haben wir $P_1^{\mathfrak{b}} = P_1 C_{12}^{\beta_1}$. Ebenso folgt $P_2^{\mathfrak{b}} = P_2 C_{12}^{\beta_2}$, $P_3^{\mathfrak{b}} = P_3 C_{34}^{\beta_3}$ und $P_4^{\mathfrak{b}} = P_4 C_{34}^{\beta_4}$. Also ist $\mathfrak{B}$ eine elementar abelsche Gruppe vom Exponenten 3 mit höchstens vier Erzeugenden. Die $\mathfrak{b}$ mit $P_1^{\mathfrak{b}} = P_1$ und $P_2^{\mathfrak{b}} = P_2$ bilden wegen der Invarianz von $\{P_1, P_2\}$ bei $\mathfrak{A}$ einen Normalteiler $\mathfrak{B}_1$ von $\mathfrak{A}$. Offenbar ist $(\mathfrak{B}_1) \mid 3^2$ und $(\mathfrak{B}/\mathfrak{B}_1) \mid 3^2$. Zusammen mit $r(\mathfrak{A}/\mathfrak{B}) = 2$ folgt $r(\mathfrak{A}) = 2$ und dann auch $r(\mathfrak{G}/\mathfrak{P}') = 2$. Damit ist der Beweis unserer Behauptung erbracht.

Beispiel 1 zeigt, daß aus $r\big(\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G})\big) = 2$ nicht notwendig $r(\mathfrak{G}) = 2$ folgt. Gleichzeitig hat sich herausgestellt, daß die Nilpotenz von $\mathfrak{G}'$ in Hilfssatz 5 keine überflüssige Voraussetzung war.

Nun zeigen wir, daß in Hilfssatz 5 selbst bei nilpotenter Kommutatorgruppe $\mathfrak{G}'$ der arithmetische Rang $\bar{r}(\mathfrak{G})$ nicht durch $r(\mathfrak{G})$ ersetzt werden darf. Wir geben nämlich eine Gruppe $\mathfrak{G}$ mit $r\big(\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G})\big) \leqq 3$, $r(\mathfrak{G}) = 6$ und nilpotentem $\mathfrak{G}'$ an.

Beispiel 2. Im GALOIS-Feld $GF(5^3)$ gibt es ein ξ mit $\xi \neq 1$, $\xi^{31} = 1$. Seien ξ' und ξ'' die Konjugierten von ξ über $GF(5)$. Dann ist die Diagonalmatrix

$$\bar{A}_3 = \begin{pmatrix} \xi & 0 & 0 \\ 0 & \xi' & 0 \\ 0 & 0 & \xi'' \end{pmatrix}$$

transformierbar in eine Matrix A_3 mit Elementen aus $GF(5)$. Wegen $\xi \notin GF(5)$ ist A_3 über $GF(5)$ irreduzibel. Im GALOIS-Feld $GF(5^2)$ existiert ein η mit

$\eta \neq 1$, $\eta^3 = 1$. Ist η' das konjugierte Element von η über $GF(5)$, so läßt sich

$$\bar{A}_2 = \begin{pmatrix} \eta & 0 \\ 0 & \eta' \end{pmatrix}$$

transformieren in ein A_2 mit Elementen aus $GF(5)$. Auch A_2 ist irreduzibel über $GF(5)$.

Die Gruppe $\mathfrak{P}$ werde erzeugt von den fünf Elementen $P_1, \ldots, P_5$. Folgende Regeln seien in $\mathfrak{P}$ gültig: $X^5 = (X, (Y, Z)) = E$. Dann ist $(\mathfrak{P}) = 5^{5+\binom{5}{2}} = 5^{15}$. Wir erweitern $\mathfrak{P}$ mit einer zyklischen Automorphismengruppe $\{a\}$ zu der Gruppe $\mathfrak{G}$. Mod $\mathfrak{P}'$ mögen P_1, P_2, P_3 gemäß A_3 transformiert werden, P_4, P_5 mod $\mathfrak{P}'$ gemäß A_2. Offenbar ist $r(\mathfrak{G}/\mathfrak{P}') = 3$, also $r(\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G})) \leq 3$ wegen $\mathfrak{P}' \leq \Phi(\mathfrak{P}) \leq \Phi(\mathfrak{G})$. Setzen wir wieder $C_{ik} = (P_i, P_k)$, so ist $C_{45}^{a} = C_{45}^{\alpha}$ (mit geeignetem α). C_{12}, C_{13}, C_{23} erzeugen einen Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Die restlichen sechs C_{ik} bilden einen bei a invarianten Teilmodul $\mathfrak{m}$, der gemäß dem KRONECKER-Produkt $A_3 \times A_2$ transformiert wird. $\xi \cdot \eta$ ist Eigenwert von $A_3 \times A_2$. Wegen $\xi\eta \notin GF(5^3)$ und $\xi\eta \notin GF(5^2)$ hat $\xi\eta$ über $GF(5)$ sechs Konjugierte. $\mathfrak{m}$ enthält daher einen über $GF(5)$ irreduziblen Bestandteil der Dimension 6, ist also selbst irreduzibel. Damit ist $r(\mathfrak{G}) = 6$ nachgewiesen.

Definition 5. *Sei $\mathfrak{N}$ ein Normalteiler der auflösbaren Gruppe $\mathfrak{G}$. Gibt es eine durch $\mathfrak{N}$ laufende Hauptreihe von $\mathfrak{G}$, deren unterhalb $\mathfrak{N}$ liegende Hauptfaktoren abelsche Gruppen mit höchstens k Erzeugenden sind, so nennen wir $\mathfrak{N}$ eingebettet in $\mathfrak{G}$ vom Relativrang $r_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{N}) \leq k$. Ist speziell der Relativrang 1, so nennen wir $\mathfrak{N}$ nach einem Vorschlag von Herrn* BAER *lokal zyklisch eingebettet.*

Den folgenden Satz verdankt der Verfasser Herrn R. BAER. Der Beweis ist eine auf endliche Gruppen zugeschnittene Variante des von Herrn BAER mündlich mitgeteilten Beweises.

Satz 12. *Sei $r_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{N}) = 1$. Ist $\mathfrak{C}(\mathfrak{N})$ der Zentralisator von $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{G}$, so gilt $r(\mathfrak{G}/\mathfrak{C}(\mathfrak{N})) = 1$*[5]).

Beweis. Wir führen eine Induktion nach $(\mathfrak{G})$ und $(\mathfrak{N})$ durch. Sei $\mathfrak{E} = \mathfrak{N}_0 \lhd \mathfrak{N}_1 \lhd \cdots \lhd \mathfrak{N}_i < \mathfrak{N}_{i+1} = \mathfrak{N}$ das unterhalb $\mathfrak{N}$ liegende Stück einer durch $\mathfrak{N}$ laufenden Hauptreihe von $\mathfrak{G}$. Nach unserer Voraussetzung sind die Faktorgruppen $\mathfrak{N}_j/\mathfrak{N}_{j-1}$ zyklisch von Primzahlordnung.

Ist $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1$, so ist unser Satz trivial, da $\mathfrak{G}/\mathfrak{C}(\mathfrak{N}_1)$ als Untergruppe der Automorphismengruppe von $\mathfrak{N}_1$ zyklisch ist. Sei also $\mathfrak{N}_1 \neq \mathfrak{N}$. Die Induktion nach $(\mathfrak{N})$ erlaubt die Annahme, daß $r(\mathfrak{G}/\mathfrak{C}(\mathfrak{N}_i)) = 1$ ist. Sei $\mathfrak{C}(\mathfrak{N}/\mathfrak{N}_1)$ der Zentralisator von $\mathfrak{N}/\mathfrak{N}_1$ in $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}_1$. Aus der Richtigkeit des Satzes für $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}_1$ folgt $r(\mathfrak{G}/\mathfrak{C}(\mathfrak{N}/\mathfrak{N}_1)) = 1$. Setzen wir $\mathfrak{D} = \mathfrak{C}(\mathfrak{N}_i) \cap \mathfrak{C}(\mathfrak{N}/\mathfrak{N}_1)$, so liefert Hilfssatz 2 die Aussage $r(\mathfrak{G}/\mathfrak{D}) = 1$. Sei nun N ein erzeugendes Element für $\mathfrak{N}/\mathfrak{N}_i$ und $D \in \mathfrak{D}$. Der von D bei Transformation in $\mathfrak{N}$ bewirkte Automorphismus ist dann durch $DND^{-1} = NN_1$ mit $N_1 \in \mathfrak{N}_1$ eindeutig festgelegt. Wegen $\mathfrak{D} \leq \mathfrak{C}(\mathfrak{N}_i) \leq \mathfrak{C}(\mathfrak{N}_1)$ haben wir $D'DND^{-1}D'^{-1} = NN_1N_1'$. Wir erhalten so eine homomorphe Abbildung von $\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{N}_1$, bei der $\mathfrak{C}(\mathfrak{N})$ auf $\mathfrak{E}$ abgebildet wird.

[5]) Ein ähnliches Resultat über Gruppen von Automorphismen hat KALOUJNINE in [18] und [19] angegeben.

Also ist $\mathfrak{D}/\mathfrak{C}(\mathfrak{N})$ isomorph zu einer Untergruppe von $\mathfrak{N}_1$ und daher zyklisch. Zusammen mit $r(\mathfrak{G}/\mathfrak{D}) = 1$ folgt daraus die Behauptung.

Satz 13. *Sei $\mathfrak{G}$ auflösbar. Ist die* FITTING*-Gruppe $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ lokal zyklisch in $\mathfrak{G}$ eingebettet, so ist $\mathfrak{G}$ überauflösbar.*

Beweis. Nach Satz 12 ist $\mathfrak{G}/\mathfrak{C}(\mathfrak{F})$ überauflösbar. Bei auflösbaren Gruppen gilt aber $\mathfrak{C}(\mathfrak{F}) \leq \mathfrak{F}$ (s. FITTING [6], S. 107 oder BAER [1], S. 646). Somit ist $\mathfrak{G}/\mathfrak{F}$ überauflösbar, und dann auch $\mathfrak{G}$ wegen der lokal zyklischen Einbettung von $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{G}$.

Satz 13 ist ein Gegenstück zu Satz 10; in beiden Fällen folgt aus einer Aussage über einen Teil der Hauptfaktoren von $\mathfrak{G}$ eine entsprechende Aussage über alle Hauptfaktoren von $\mathfrak{G}$.

Man könnte vermuten, daß folgende Verallgemeinerung von Satz 12 richtig ist: Aus $r_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{N}) \leq k$ folgt bei auflösbaren Gruppen $\mathfrak{G}$, daß $r\left(\mathfrak{G}/\mathfrak{C}(\mathfrak{N})\right) \leq k$. Dies ist jedoch nicht wahr:

Beispiel 3. Sei $\mathfrak{N} = \{N_1\} \times \{N_2\}$ eine abelsche Gruppe vom Typ $(3^2, 3^2)$. Die Automorphismen $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{N}$ stellen sich dar in der Gestalt

$$N_1^{\mathfrak{a}} = N_1^{\alpha_{11}} N_2^{\alpha_{12}}, \qquad N_2^{\mathfrak{a}} = N_1^{\alpha_{21}} N_2^{\alpha_{22}}.$$

Die Automorphismengruppe von $\mathfrak{N}$ ist also isomorph zur Gruppe aller zweireihigen Matrizen mit Elementen mod 3^2. Diejenigen Matrizen, deren Determinante $\equiv 1 \bmod 3$ ist, bilden eine Untergruppe $\mathfrak{A}$ der Automorphismengruppe. Wir bilden nun das Holomorph von $\mathfrak{N}$ mit $\mathfrak{A}$. Die entstehende Gruppe heiße $\mathfrak{G}$. Offenbar ist $\mathfrak{L} = \{N_1^3\} \times \{N_2^3\}$ eine charakteristische Untergruppe von $\mathfrak{N}$, also invariant in $\mathfrak{G}$. Daraus folgt $r_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{N}) \leq 2$. Diejenigen Automorphismen aus $\mathfrak{A}$, welche $\mathfrak{N}/\mathfrak{L}$ elementweise fest lassen, bilden einen Normalteiler $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$ und werden dargestellt durch die Matrizen $E + 3B$, welche mod 3 zur Einheitsmatrix kongruent sind. Aus $(E + 3B_1)(E + 3B_2) \equiv E + 3(B_1 + B_2) \bmod 3^2$ folgt, daß $\mathfrak{B}$ isomorph ist zur additiven Gruppe der zweireihigen Matrizen mod 3, also elementar abelsch vom Typ $(3, 3, 3, 3)$ ist.

Dem Element

$$\begin{pmatrix} 1 + 3\beta_{11} & 3\beta_{12} \\ 3\beta_{21} & 1 + 3\beta_{22} \end{pmatrix}$$

von $\mathfrak{B}$ ordnen wir den Vektor $\mathfrak{b} = (\beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{21}, \beta_{22})$ zu (Komponenten mod 3). Transformation von $\mathfrak{B}$ mit Elementen aus $\mathfrak{A}$ induziert im Raum der $\mathfrak{b}$ eine lineare Abbildung. Bekanntlich erzeugen die beiden Matrizen

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

die ganze Gruppe $\mathfrak{A}$. Bezüglich der Basis $(1, 0, 0, 1)$, $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$ des Raumes der $\mathfrak{b}$ haben S und T die Gestalt

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Somit läßt sich eine Darstellung vom Grad 1 abspalten. Die restliche Darstellung vom Grad 3 ist (absolut) irreduzibel, wie sich leicht mit Hilfe des SCHURschen Lemmas nachprüfen läßt. Also besitzt $\mathfrak{A}$ einen Hauptfaktor der Ordnung 3^3, woraus $r(\mathfrak{G}/\mathfrak{C}(\mathfrak{N})) \geqq 3$ folgt. Damit ist das angekündigte Gegenbeispiel erbracht.

§ 5. Gruppen von höherem Rang.

Satz 7 hat ein Analogon für $r(\mathfrak{G}) = 2$:

Satz 14. *Ist $r(\mathfrak{G}) = 2$, so ist die Sylowgruppe zum maximalen Primteiler der Gruppenordnung invariant, sofern dieser Primteiler größer als 3 ist. Gilt speziell $2 \nmid (\mathfrak{G})$ oder $3 \nmid (\mathfrak{G})$, so besitzt $\mathfrak{G}$ einen geordneten Sylowturm*[6]).

Beweis durch Induktion nach $(\mathfrak{G})$. Sei $\mathfrak{N}$ ein minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$ der Ordnung q^α mit $\alpha \leqq 2$, $p > 3$ der maximale Primteiler von $(\mathfrak{G})$. Nehmen wir an, daß der Satz für die Gruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ gilt, so folgt $\mathfrak{N}\mathfrak{G}_p \trianglelefteq \mathfrak{G}$. Ist $q = p$, so haben wir $\mathfrak{N}\mathfrak{G}_p = \mathfrak{G}_p \lhd \mathfrak{G}$ und sind fertig. Sei also $q \neq p$. Die Ordnung der Automorphismengruppe von $\mathfrak{N}$ ist $q-1$ (für $\alpha = 1$) oder $(q^2-1)(q^2-q)$ (für $\alpha = 2$), enthält daher nur Primteiler $\leqq q$, es sei denn, daß $q+1$ eine Primzahl ist. Letzteres trifft jedoch nur für $q = 2$ zu. Also geht p in keinem Falle in der Ordnung der Automorphismengruppe von $\mathfrak{N}$ auf. Somit haben wir $\mathfrak{N}\mathfrak{G}_p = \mathfrak{N} \times \mathfrak{G}_p$, und $\mathfrak{G}_p$ ist charakteristische Untergruppe des Normalteilers $\mathfrak{N}\mathfrak{G}_p$ von $\mathfrak{G}$, also invariant in $\mathfrak{G}$. Der Rest der Behauptung folgt nun leicht.

Satz 15. *Sind die Indizes in allen Maximalketten von $\mathfrak{G}$ Primzahlen oder Primzahlquadrate, so ist $\mathfrak{G}$ auflösbar und hat einen Rang $r(\mathfrak{G}) \leqq 2$.*

Beweis. Da sich die Voraussetzung auf alle Untergruppen und Faktorgruppen von $\mathfrak{G}$ überträgt, können wir eine Induktion nach $(\mathfrak{G})$ ansetzen. Wir können also annehmen, daß jede eigentliche Untergruppe von $\mathfrak{G}$ auflösbar ist und einen Rang $\leqq 2$ hat. Sei p der maximale Primteiler von $(\mathfrak{G})$. Ist $p = 3$, so haben wir $(\mathfrak{G}) = 3^\varkappa 2^\delta$, und $\mathfrak{G}$ ist nach einem bekannten Satz von BURNSIDE auflösbar (SPEISER [27], S. 193). Sei also $p > 3$. Schließen wir den trivialen Fall $\mathfrak{G}_p = \mathfrak{G}$ aus, so liegt $\mathfrak{G}_p$ in einer maximalen Untergruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{G}$ mit $(\mathfrak{G}:\mathfrak{U}) = q^\gamma$, wobei $\gamma \leqq 2$ und $q < p$ ist. Nach Satz 14 gilt $\mathfrak{G}_p \trianglelefteq \mathfrak{U}$. Der Index des Normalisators $\mathfrak{N}(\mathfrak{G}_p)$ von $\mathfrak{G}_p$ in $\mathfrak{G}$ hat daher die Gestalt q^δ mit $\delta \leqq 2$ und erfüllt bekanntlich die Kongruenz $q^\delta \equiv 1 (p)$. Wegen $p > q$ ist $\delta = 1$ ausgeschlossen. Aus $\delta = 2$ würde folgen $p \mid q^2 - 1$, also wegen $p > q$ notwendig $p \mid q+1$. Dann ist aber $p = q+1$ und $p = 3$, was ausgeschlossen worden war. Es bleibt somit nur die Möglichkeit $\delta = 0$, d.h. $\mathfrak{N}(\mathfrak{G}_p) = \mathfrak{G}$ übrig, und $\mathfrak{G}_p$ ist invariant in $\mathfrak{G}$. Durch Anwendung der Induktionsannahme auf $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_p$ folgt die Auflösbarkeit von $\mathfrak{G}$. Die Aussage über den Rang ergibt sich nun sofort aus Satz 1.

Es sei ausdrücklich erwähnt, daß Satz 15 sich nicht auf solche Gruppen ausdehnen läßt, deren Indizes in den Maximalketten Primzahlen, Primzahl-

[6]) Im wesentlichen bei ZAPPA [37], S. 7.

quadrate oder Kuben von Primzahlen sind. Denn die einfache Gruppe der Ordnung 168 hat in ihren Maximalketten die Indizes 2, 4, 8, 3 und 7. Offen bleibt die folgende Frage: Ist $\mathfrak{G}$ schon dann auflösbar, wenn die Indizes aller maximalen Untergruppen Primzahlen oder Primzahlquadrate sind? Jedenfalls zeigt Beispiel 1 in § 4, daß eine solche Gruppe nicht notwendig einen Rang ≤ 2 hat.

Bei der weiteren Untersuchung benötigen wir einige Kenntnisse über die auflösbaren Untergruppen der projektiven unimodularen Gruppen $PSL(2, p)$ und $PSL(3, p)$.

Zunächst die auflösbaren Untergruppen von $PSL(2, p)$ (Burnside [3], S. 436—450): (1) Gruppen der Ordnung $p\,d$ mit $d \mid \frac{p-1}{2}$, welche einen Normalteiler der Ordnung p enthalten. (2) Zyklische Gruppen der Ordnung z mit $z \mid \frac{p-1}{2}$ oder $z \mid \frac{p+1}{2}$. (3) Diedergruppen der Ordnung $2z$, z wie unter (2). (4) Die alternierende Gruppe $\mathfrak{A}_4$. (5) Die symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}_4$.

Nun die auflösbaren Untergruppen von $PSL(3, p)$ (Mitchell [22]): (1) Gruppen, welche einen Punkt oder eine Gerade fest lassen. Diese Gruppen sind reduzibel und besitzen einen Normalteiler $\mathfrak{N}$ einer Ordnung p^α mit $\alpha \leq 2$ derart, daß $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ isomorph ist zu einer vollreduziblen Gruppe. (Unter diesen Gruppen sind also alle oben aufgezählten Untergruppen von $PSL(2, p)$ enthalten.) (2) Monomiale Gruppen. (3) Gruppen, welche eine quadratische Form invariant lassen, daher isomorph sind zu einer Untergruppe von $PSL(2, p)$. (4) Die Hessesche Gruppe der Ordnung 216 und ihre Normalteiler der Ordnungen 72 und 36.

(Die übrigen, in der Mitchellschen Liste angegebenen Gruppen sind entweder nicht auflösbar oder treten erst bei den projektiven Gruppen über allgemeinen Galois-Feldern auf, nicht aber bei den projektiven Gruppen über Primkörpern.)

Satz 8 hat für Gruppen vom Rang 2 und 3 ein Gegenstück:

Satz 16. *Haben alle maximalen Untergruppen der auflösbaren Gruppe $\mathfrak{G}$ Primzahl- oder Primzahlquadratindex, so ist die vierte Kommutatorgruppe $\mathfrak{G}^{(4)}$ nilpotent. Hat $\mathfrak{G}$ außerdem noch ungerade Ordnung, so ist schon $\mathfrak{G}''$ nilpotent.*

Beweis wie bei Satz 8. Zu jeder maximalen Untergruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{G}$ erhalten wir eine Darstellung von $\mathfrak{G}$ als primitive und auflösbare Permutationsgruppe von Primzahl- oder Primzahlquadratgrad. Solche Gruppen lassen sich bekanntlich auffassen als lineare inhomogene Abbildungen in 1 oder 2 Dimensionen über einem endlichen Primkörper. Mit Hilfe obiger Aufzählung der auflösbaren Untergruppen von $PSL(2, p)$ erkennen wir leicht, daß alle diese Permutationsgruppen die Regel $\mathfrak{H}^{(5)} = \mathfrak{E}$ erfüllen. Ist $\mathfrak{N}$ der bei der Darstellung von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{E}$ abgebildete Normalteiler von $\mathfrak{G}$, so haben wir also $\mathfrak{G}^{(5)} \leq \mathfrak{N} \leq \mathfrak{U}$. Da dies für jede maximale Untergruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{G}$ richtig ist, liegt $\mathfrak{G}^{(5)}$ in $\Phi(\mathfrak{G})$. Mit Hilfe eines schon einmal benutzten Satzes von Gaschütz sehen wir nun, daß $\mathfrak{G}^{(4)}$ nilpotent ist.

Die Behauptung über Gruppen von ungerader Ordnung ergibt sich in der gleichen Weise durch Betrachtung der auflösbaren Untergruppen ungerader Ordnung von $PSL(2, p)$.

Satz 17. *Sind die Indizes aller maximalen Untergruppen der auflösbaren Gruppe $\mathfrak{G}$ Primzahlen oder Primzahlquadrate oder Kuben von Primzahlen, so ist $\mathfrak{G}^{(6)}$ nilpotent. Ist $(\mathfrak{G})$ ungerade, so ist bereits $\mathfrak{G}^{(4)}$ nilpotent.*

Beweis wie bei Satz 16. Dabei benutzen wir die angegebene Tabelle der auflösbaren Untergruppen von $PSL(3, p)$ und insbesondere die Tatsache, daß alle diese Gruppen die Regel $\mathfrak{H}^{(7)} = \mathfrak{E}$ erfüllen.

Einfache Eigenschaften haben auch diejenigen auflösbaren Gruppen, deren arithmetischer Rang $\bar{r}(\mathfrak{G})$ eine Primzahl ist. [Es kommt also weniger auf die absolute Größe als auf die Primfaktorzerlegung von $\bar{r}(\mathfrak{G})$ an, was unsere Benennung „arithmetischer Rang" rechtfertigt.] Zunächst ein Hilfssatz:

Hilfssatz 6. *Ist $\mathfrak{K}$ eine auflösbare und über $GF(q)$ irreduzible Untergruppe von $GL(p, q)$ mit $\bar{r}(\mathfrak{K}) \mid p$ und $p > 2$, so gilt*: (1) $\mathfrak{K}^{(3)} = \mathfrak{E}$; (2) *$\mathfrak{K}$ ist überauflösbar*; (3) *entweder $\mathfrak{K}' = \mathfrak{E}$ oder $p \mid (\mathfrak{K})$.*

Beweis. a) Sei zunächst $\mathfrak{K}$ über irgendeinem Erweiterungskörper von $GF(q)$ reduzibel. Dann haben alle absolut irreduziblen Bestandteile von $\mathfrak{K}$ gleichen Grad d und kommen alle gleich oft vor, etwa f mal. Wegen $f > 1$ folgt aus $df = p$ notwendig $f = p$ und $d = 1$. Die irreduziblen Bestandteile sind daher abelsch, und $\mathfrak{K}'$ enthält nur die Einsdarstellung. Andererseits zerfällt $\mathfrak{K}'$ als Normalteiler von $\mathfrak{K}$ nach einem Satz von CLIFFORD [5] völlig in Bestandteile gleichen Grades, die also eindimensional sind. Beides zusammen ergibt $\mathfrak{K}' = \mathfrak{E}$. Offenbar sind dann (1), (2) und (3) erfüllt.

b) Sei nun $\mathfrak{K}$ absolut irreduzibel und primitiv[7]). $\mathfrak{M}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{K})$ sei ein minimaler Normalteiler von $\mathfrak{K}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{K})$ der Ordnung r^{μ}, wobei r eine Primzahl ist (übrigens gilt $\mu = 1$ oder $\mu = p$). Wegen der Primitivität von $\mathfrak{K}$ ist $\mathfrak{M}' \neq \mathfrak{E}$, also auch $\mathfrak{M}_r' \neq \mathfrak{E}$ (SPEISER [27], S. 195). Da $\mathfrak{M}$ nilpotent ist, gilt $\mathfrak{M}_r < \mathfrak{K}$. Nach CLIFFORD [5] zerfällt $\mathfrak{M}_r$ in s Darstellungen vom Grad t mit $st = p$. Wegen $\mathfrak{M}_r' \neq \mathfrak{E}$ ist $t > 1$, also $t = p$, d.h. $\mathfrak{M}_r$ ist irreduzibel. Daraus folgt $r \neq q$ (KOCHENDÖRFFER [20], S. 35). Also handelt es sich nicht um eine modulare Darstellung von $\mathfrak{M}_r$. Aus der Irreduzibilität von $\mathfrak{M}_r$ folgt nach dem Lemma von SCHUR daß $\mathfrak{Z}(\mathfrak{M}_r)$ aus Vielfachen der Einheitsmatrix besteht, mithin in $\mathfrak{Z}(\mathfrak{K})$ liegt. $\mathfrak{M}_r$ ist eine projektive, irreduzible Darstellung der abelschen Gruppe $\mathfrak{M}_r/\mathfrak{Z}(\mathfrak{M}_r)$. Nach FRUCHT ([7], S. 20) ist daher $(\text{Grad } \mathfrak{M}_r)^2 = p^2 = (\mathfrak{M}_r/\mathfrak{Z}(\mathfrak{M}_r))$. Wegen $\mathfrak{Z}(\mathfrak{M}_r) \leqq \mathfrak{Z}(\mathfrak{K})$ ist $\mathfrak{M}_r/\mathfrak{Z}(\mathfrak{M}_r)$ ein Hauptfaktor von $\mathfrak{K}$ mit zwei Erzeugenden. Dies geht aber wegen $\bar{r}(\mathfrak{K}) \mid p$ und $p \neq 2$ nicht. Daher kann $\mathfrak{K}$ nicht primitiv sein.

c) Sei schließlich $\mathfrak{K}$ absolut irreduzibel und imprimitiv, also monomial. Dann enthält $\mathfrak{K}$ einen abelschen Normalteiler $\mathfrak{A}$ bestehend aus Diagonalmatrizen, dessen Faktorgruppe $\mathfrak{K}/\mathfrak{A}$ isomorph ist zu einer transitiven und auflösbaren Permutationsgruppe $\mathfrak{P}$ vom Primzahlgrad p. Bekanntlich besitzt $\mathfrak{P}$ einen zyklischen Normalteiler $\mathfrak{Z}_p$ der Ordnung p, und $\mathfrak{P}/\mathfrak{Z}_p$ ist isomorph zu einer zyklischen Gruppe $\mathfrak{Z}_d$ einer Ordnung d mit $d \mid p - 1$ (PERRON [24], S. 151

[7]) Die Überlegungen dieses Abschnittes schließen sich teilweise an BURNSIDE [4] a

Zu (1). Wegen $\mathfrak{P}'' = \mathfrak{E}$ gilt $\mathfrak{R}'' \leq \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{R}^{(3)} = \mathfrak{E}$.

Zu (2). $\mathfrak{P}$ ist überauflösbar. Angenommen es gäbe unter $\mathfrak{A}$ einen Hauptfaktor von $\mathfrak{R}$ mit p Erzeugenden von der Ordnung r^p (r eine Primzahl). Dann besäße $\mathfrak{P}$ eine über $GF(r)$ irreduzible Darstellung Γ vom Grad p.

Wir benötigen für die kommenden Betrachtungen mehrfach die folgende einfache Bemerkung: Ist Γ eine irreduzible Darstellung einer zyklischen Gruppe der Ordnung z über einem GALOIS-Feld, so ist Grad $\Gamma \leq z - 1$. (Dies läßt sich mit den beim Beweis von Hilfssatz 4 angestellten Überlegungen leicht verifizieren.)

Nun sind drei Fälle zu unterscheiden:

Fall 1. Sei $r = p$. $\mathfrak{Z}_p$ kann nach der Bemerkung nicht irreduzibel sein, zerfällt daher nach CLIFFORD [5] in Bestandteile vom Grad 1. Da 1 die einzige p-te Einheitswurzel in $GF(p)$ ist, wird $\mathfrak{Z}_p$ auf $\mathfrak{E}$ abgebildet. Also ist Γ Darstellung einer Faktorgruppe von $\mathfrak{Z}_d$, kann daher (wieder nach der Bemerkung) nicht den Grad p haben.

Fall 2. Sei $r \neq p$, und $\mathfrak{P}$ werde treu dargestellt. $\mathfrak{P} = \mathfrak{Z}_p$ ist unmöglich, da $\mathfrak{Z}_p$ (wieder nach der Bemerkung) keine irreduzible Darstellung vom Grad p besitzt.

Zerfällt Γ über einem geeigneten Erweiterungskörper von $GF(r)$, so sind die absolut irreduziblen Bestandteile von Γ linear. $\mathfrak{P}' = \mathfrak{Z}_p$ enthält daher nur die Einsdarstellung, ist aber nach CLIFFORD [5] vollständig reduzibel. Daher wird $\mathfrak{Z}_p$ bei Γ durch E dargestellt, im Widerspruch zur Treue von Γ.

Also ist Γ absolut irreduzibel. Da $p \neq r$ ist, läßt sich Γ in einem geeigneten Erweiterungskörper von $GF(r)$ so transformieren, daß $\mathfrak{Z}_p$ aus Diagonalmatrizen besteht. Aber wegen $\mathfrak{Z}_p \leq \mathfrak{Z}(\mathfrak{P})$ enthält $\mathfrak{Z}_p$ nicht nur Vielfache der Einheitsmatrix. Daher ist Γ imprimitiv, also monomial (SPEISER [27], S. 195). Aus der Irreduzibilität von Γ folgt nun der Widerspruch $p \mid (\mathfrak{P}/\mathfrak{Z}_p) = d \leq p - 1$.

Fall 3. Sei Γ keine treue Darstellung von $\mathfrak{P}$. Dann wird $\mathfrak{Z}_p$ bei Γ auf $\mathfrak{E}$ abgebildet, und Γ ist Darstellung von $\mathfrak{Z}_d$. Nach unserer Bemerkung kann dann Γ nicht irreduzibel sein.

Also besitzt $\mathfrak{R}$ keinen Hauptfaktor mit p Erzeugenden, ist also überauflösbar. Damit ist (2) bewiesen.

Zu (3). Aus $p \mid (\mathfrak{P})$ folgt $p \mid (\mathfrak{R})$.

Da $\bar{r}(\mathfrak{G}) = 2$ gleichwertig ist mit $r(\mathfrak{G}) = 2$ und dieser Fall schon in den Sätzen 14 bis 16 behandelt wurde, können wir uns weiterhin auf $\bar{r}(\mathfrak{G}) = p$ mit $p \neq 2$ beschränken.

Satz 18. *Ist* $\bar{r}(\mathfrak{G}) = p > 2$, *so gilt*: (1) $\mathfrak{G}^{(3)} \leq \mathfrak{F}(\mathfrak{G})$; (2) $\mathfrak{G}/\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ *ist überauflösbar*; (3) $\mathfrak{G}' \leq \mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ *oder* $p \mid (\mathfrak{G})$.

Beweis. Sei $\mathfrak{N}_i/\mathfrak{N}_{i+1}$ ein Hauptfaktor von $\mathfrak{G}$ der Ordnung $q_i^{\alpha_i}$. Dann ist $\alpha_i = 1$ oder $\alpha_i = p$. Ist $\mathfrak{C}(\mathfrak{N}_i/\mathfrak{N}_{i+1})$ der Zentralisator von $\mathfrak{N}_i/\mathfrak{N}_{i+1}$ in $\mathfrak{G}$, so ist $\mathfrak{G}/\mathfrak{C}(\mathfrak{N}_i/\mathfrak{N}_{i+1})$ abelsch (für $\alpha_i = 1$) oder isomorph zu einer Gruppe $\mathfrak{R}$ von der in Hilfssatz 6 betrachteten Art. Nun beachten wir noch, daß der Durchschnitt aller $\mathfrak{C}(\mathfrak{N}_i/\mathfrak{N}_{i+1})$ in $\mathfrak{F}$ liegt (KALOUJNINE [18]). Mit Hilfssatz 6 erhalten wir:

(1) $\mathfrak{G}^{(3)} \leqq \mathfrak{C}(\mathfrak{N}_i/\mathfrak{N}_{i+1})$ für alle i, also $\mathfrak{G}^{(3)} \leqq \bigcap_i \mathfrak{C}(\mathfrak{N}_i/\mathfrak{N}_{i+1}) \leqq \mathfrak{F}(\mathfrak{G})$.

(2) Wegen der Überauflösbarkeit aller $\mathfrak{G}/\mathfrak{C}(\mathfrak{N}_i/\mathfrak{N}_{i+1})$ ist nach Hilfssatz 2 auch $\mathfrak{G}/\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ überauflösbar.

(3) Ist $(\mathfrak{N}_i/\mathfrak{N}_{i+1}) = q_i$, so gilt $\mathfrak{G}' \leqq \mathfrak{C}(\mathfrak{N}_i/\mathfrak{N}_{i+1})$. Für $(\mathfrak{N}_i/\mathfrak{N}_{i+1}) = q_i^p$ ist nach Hilfssatz 6 $\mathfrak{G}' \leqq \mathfrak{C}(\mathfrak{N}_i/\mathfrak{N}_{i+1})$ oder $p \mid (\mathfrak{G}/\mathfrak{C}(\mathfrak{N}_i/\mathfrak{N}_{i+1}))$. Insgesamt folgt $\mathfrak{G}' \leqq \mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ oder $p \mid (\mathfrak{G})$, q. e. d.

§ 6. Auflösbare Gruppen mit lauter abelschen Sylowgruppen.

In dem besonderen Fall, daß alle Sylowgruppen der auflösbaren Gruppe $\mathfrak{G}$ abelsch sind, lassen sich weitergehende und zum Teil abschließende Resultate angeben.

TAUNT hat bewiesen ([*28*], S. 40), daß jede auflösbare Gruppe kubusfreier Ordnung höchstens dreistufig metabelsch ist. Dieses Ergebnis läßt sich verallgemeinern:

Satz 19. *Sei $\mathfrak{G}$ auflösbar. Die Sylowgruppen von $\mathfrak{G}$ seien alle abelsch mit höchstens k Erzeugenden. Dann gilt $\mathfrak{G}^{(3)} = \mathfrak{E}$ für $k \leqq 2$ und $\mathfrak{G}^{(4)} = \mathfrak{E}$ für $3 \leqq k \leqq 5$.*

Beweis. Wir betrachten einen Hauptfaktor von $\mathfrak{G}$ der Ordnung p^α $(\alpha \leqq k)$ und die von $\mathfrak{G}$ in diesem induzierte Automorphismengruppe $\mathfrak{A}$. $\mathfrak{A}$ läßt sich in der bekannten Weise als Untergruppe von $GL(\alpha, p)$ auffassen. Da $\mathfrak{G}_p$ abelsch ist, induziert $\mathfrak{G}_p$ in dem Hauptfaktor den identischen Automorphismus, woraus $p \nmid (\mathfrak{A})$ folgt. Nach der SCHURschen Erweiterung des Satzes von MASCHKE ist jede reduzible Untergruppe von $\mathfrak{A}$ vollreduzibel. $\mathfrak{A}$ ist als homomorphes Bild von $\mathfrak{G}$ ebenfalls eine auflösbare Gruppe mit lauter abelschen Sylowgruppen. ITÔ hat in [*15*] gezeigt, daß sich jede Darstellung einer solchen Gruppe über einem Körper der Charakteristik 0 auf monomiale Gestalt transformieren läßt. Dieser Satz kann wegen $p \nmid (\mathfrak{A})$ genau so in unserem Fall bewiesen werden. Als monomiale Gruppe besitzt $\mathfrak{A}$ einen abelschen Normalteiler $\mathfrak{D}$ (die Diagonalmatrizen in der Gruppe), und $\mathfrak{A}/\mathfrak{D}$ ist isomorph zu einer transitiven Permutationsgruppe in α Symbolen. Berücksichtigen wir, daß auch diese Permutationsgruppe eine auflösbare Gruppe mit lauter abelschen Sylowgruppen ist, so sehen wir leicht: Für $k \leqq 2$ gilt $\mathfrak{A}'' = \mathfrak{E}$, für $3 \leqq k \leqq 5$ ist $\mathfrak{A}^{(3)} = \mathfrak{E}$.

Wir behandeln nun den Fall $k = 2$; in den übrigen Fällen schließen wir nach Ersetzung von $\mathfrak{G}''$ durch $\mathfrak{G}^{(3)}$ in der gleichen Weise.

Sei $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0 \rhd \mathfrak{G}_1 \rhd \cdots \rhd \mathfrak{G}'' \rhd \mathfrak{N}_1 \rhd \cdots \rhd \mathfrak{N}_i \rhd \mathfrak{E}$ eine Hauptreihe von $\mathfrak{G}$ durch $\mathfrak{G}''$. Da nach unseren bisherigen Überlegungen $\mathfrak{G}''$ in jedem Hauptfaktor den identischen Automorphismus bewirkt, haben wir $(\mathfrak{G}'', \mathfrak{G}'') \leqq \mathfrak{N}_1$, $(\mathfrak{G}'', \mathfrak{N}_1) \leqq \mathfrak{N}_2, \ldots, (\mathfrak{G}'', \mathfrak{N}_j) = \mathfrak{E}$. Somit besitzt $\mathfrak{G}''$ eine absteigende Zentralkette, welche bei $\mathfrak{E}$ endet, und ist daher nilpotent. Da aber alle Sylowgruppen von $\mathfrak{G}$ abelsch sind, ist $\mathfrak{G}''$ sogar abelsch, also $\mathfrak{G}^{(3)} = \mathfrak{E}$.

Die Überlegungen im letzten Abschnitt des Beweises von Satz 19 gehen auf ORE zurück ([*23*], S. 459). ORE bewies damit, daß eine überauflösbare Gruppe stets nilpotente Kommutatorgruppe hat. Unser Beweisverfahren für

diesen Satz (Satz 8) lieferte bei überauflösbaren Gruppen nicht mehr als das ORESche. Bei den Sätzen 16 und 17 wäre jedoch die ORESche Methode nur unter der stärkeren Voraussetzung $r(\mathfrak{G}) \leq 2$ bzw. $r(\mathfrak{G}) \leq 3$ anwendbar gewesen. (Beispiel 1 zeigt, daß unsere Voraussetzungen wirklich schwächer sind.)

Hilfssatz 7. *Sei* $\mathfrak{U}$ *eine endliche Gruppe von* k*-reihigen Diagonalmatrizen über einem Körper. Dann läßt sich* $\mathfrak{U}$ *mit höchstens* k *Elementen erzeugen.*

Beweis. Die Elemente der Matrizen an der i-ten Stelle auf der Diagonalen erzeugen eine zyklische Gruppe $\{z_i\}$. Die Matrizen

$$Z_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & z_i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

erzeugen eine abelsche Gruppe mit k Erzeugenden, welche $\mathfrak{U}$ enthält. Daraus folgt die Behauptung.

Satz 20. *Sei* $\mathfrak{G}$ *eine auflösbare Gruppe mit lauter abelschen Sylowgruppen. Haben alle minimalen Normalteiler von* $\mathfrak{G}$ *höchstens* k *Erzeugende, so ist* $r(\mathfrak{G}) \leq k$.

Beweis durch Induktion nach $(\mathfrak{G})$. Sei $\mathfrak{N}$ ein minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$ mit $(\mathfrak{N}) = p^\alpha$ und $\alpha \leq k$. Wir betrachten $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$. Haben alle minimalen Normalteiler von $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ höchstens k Erzeugende, so gilt nach unserer Induktionsannahme $r(\mathfrak{G}/\mathfrak{N}) \leq k$. Da $\mathfrak{N}$ nicht mehr als k Erzeugende hat, folgt $r(\mathfrak{G}) \leq k$.

Nun habe $\mathfrak{G}, \mathfrak{N}$ einen minimalen Normalteiler $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ mit $(\mathfrak{M}/\mathfrak{N}) = q^\beta$ und $\beta > k$. Zwei Fälle sind zu unterscheiden:

a) Sei zunächst $p = q$. $\mathfrak{M}$ bewirkt bei Transformation in $\mathfrak{N}$ eine abelsche Automorphismengruppe, deren Ordnung eine Potenz von q ist. Wegen $p = q$ läßt sich diese, wenn wir sie in der bekannten Weise als Matrizengruppe mit Elementen aus $GF(p)$ auffassen, in einem geeigneten Erweiterungskörper von $GF(p)$ auf Diagonalgestalt bringen. Nach Hilfssatz 7 hat diese Gruppe höchstens k Erzeugende, ist also wegen $\beta > k$ kein isomorphes Bild von $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$. Daher ist $\mathfrak{C}(\mathfrak{N}) \cap \mathfrak{M}$ eine echte Obergruppe von $\mathfrak{N}$. Da $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ ist, folgt $\mathfrak{C}(\mathfrak{N}) \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{M}$. Somit haben wir $\mathfrak{M} = \mathfrak{N} \times \mathfrak{L}$ mit $(\mathfrak{L}) = q^\beta$, woraus sich $\mathfrak{L} \lhd \mathfrak{G}$ ergibt. Wegen $\beta > k$ kann $\mathfrak{L}$ nicht minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$ sein. Dann ist aber auch $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ nicht minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$, was der Wahl von $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ widerspricht.

b) Ist $p = q$, so ist $\mathfrak{M}$ als Untergruppe einer p-Sylowgruppe abelsch. Die Elemente der Ordnung p von $\mathfrak{M}$ bilden einen Normalteiler $\Omega_1(\mathfrak{M})$ von $\mathfrak{G}$, der ebensoviele Erzeugende hat wie $\mathfrak{M}$. $\mathfrak{M}$ hat aber mindestens β Erzeugende. Wegen $\beta > k$ und $(\mathfrak{N}) = p^\alpha$ mit $\alpha \leq k$ ist $\Omega_1(\mathfrak{M})$ eine echte Obergruppe von $\mathfrak{N}$, fällt daher mit $\mathfrak{M}$ zusammen, und $\mathfrak{M}$ ist elementar abelsch. $\mathfrak{M}$ erlaubt eine direkte Zerlegung $\mathfrak{M} = \mathfrak{N} \times \mathfrak{J}$. Da die Ordnung der von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{M}$ bei Transformation bewirkten Automorphismengruppe nicht durch p teilbar ist, gibt

es nach der SCHURschen Erweiterung des Satzes von MASCHKE einen Normalteiler $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{M} = \mathfrak{N} \times \mathfrak{K}$. Nach unserer Voraussetzung ist $\mathfrak{K}$ nicht minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Dann kann $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ auch nicht minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ sein, entgegen der Wahl von $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$. Damit ist auch in diesem Falle ein Widerspruch gegen die Annahme $(\mathfrak{M}/\mathfrak{N}) = q^\beta$ mit $\beta > k$ erzielt.

Die Voraussetzung über die Sylowgruppen kann in Satz 20 nicht gestrichen werden. Erweitern wir nämlich die Quaternionengruppe der Ordnung 8 mit einem Automorphismus α der Ordnung 3, welcher bezüglich eines Erzeugendensystems A, B der Quaternionengruppe gegeben sei durch $A^\alpha = AB$, $B^\alpha = A$, so erhalten wir eine auflösbare Gruppe vom Rang 2, welche nur einen minimalen Normalteiler besitzt, das Zentrum der Quaternionengruppe, und dieses ist zyklisch.

Satz 21. *Sei $\mathfrak{G}$ eine auflösbare Gruppe mit lauter abelschen Sylowgruppen. Sind die $\mathfrak{U}_i$ die maximalen Untergruppen von $\mathfrak{G}$, so sei $(\mathfrak{G}:\mathfrak{U}_i) = p_i^{\alpha_i}$ mit $\alpha_i \leq k$. Dann ist $r(\mathfrak{G}) \leq k$.*

Beweis durch Induktion nach $(\mathfrak{G})$.

a) Existieren Normalteiler $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2 = \mathfrak{E}$, so folgt aus der Induktionsannahme $r(\mathfrak{G}/\mathfrak{N}_i) \leq k$, also nach Hilfssatz 2 $r(\mathfrak{G}/\mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2) = r(\mathfrak{G}) \leq k$. Wir dürfen daher annehmen, daß $\mathfrak{G}$ nur einen minimalen Normalteiler besitzt. Dann ist $(\mathfrak{F}(\mathfrak{G})) = p^\alpha$.

b) Sei $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ elementar abelsch. Die von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ bei Transformation induzierte Automorphismengruppe hat eine zu p teilerfremde Ordnung. Nach der SCHURschen Erweiterung des MASCHKEschen Satzes gilt daher $\mathfrak{F}(\mathfrak{G}) = \Phi(\mathfrak{G}) \times \mathfrak{L}$ mit einem Normalteiler $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{G}$. Sicher ist $\mathfrak{F}(\mathfrak{G}) \neq \Phi(\mathfrak{G})$ (s. den Beweis von Hilfssatz 1), also $\mathfrak{L} \neq \mathfrak{E}$. Da $\mathfrak{G}$ nur einen minimalen Normalteiler hat, folgt $\Phi(\mathfrak{G}) = \mathfrak{E}$. Ist nun $\mathfrak{N}$ der minimale Normalteiler von $\mathfrak{G}$, so existiert ein $\mathfrak{U}_i < \mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{N} \not\leq \mathfrak{U}_i$, also $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{U}_i = \mathfrak{E}$ und $\mathfrak{G} = \mathfrak{N}\mathfrak{U}_i$. Daraus folgt $(\mathfrak{N}) = (\mathfrak{G}:\mathfrak{U}_i) = p_i^{\alpha_i}$, und $\mathfrak{N}$ hat höchstens k Erzeugende. Durch Anwendung der Induktionsannahme auf $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ folgt nun die Behauptung.

c) Sei $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ nicht elementar abelsch, also $\Phi(\mathfrak{F}) \neq \mathfrak{E}$. Unsere Induktionsannahme liefert uns jetzt $r(\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{F})) \leq k$. Da $\mathfrak{F}$ abelsch ist, folgt aus $\mathfrak{N} = \{F_1, \ldots, F_j;\ \Phi(\mathfrak{F})\} < \mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{N} \leq \mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ und $j \leq k$ durch Potenzierung mit p $\{F_1^{p^i}, \ldots, F_j^{p^i};\ \Phi^{i+1}(\mathfrak{F})\} < \mathfrak{G}$, wenn $\Phi^i(\mathfrak{F})$ die durch $\Phi^i(\mathfrak{F}) = \Phi(\Phi^{i-1}(\mathfrak{F}))$ induktiv erklärte Gruppenfolge ist. Somit haben die unterhalb $\Phi(\mathfrak{F})$ liegenden Hauptfaktoren von $\mathfrak{G}$ höchstens k Erzeugende, was zu zeigen war.

Durch Satz 21 haben die in § 4 angeschnittenen Fragen für den Spezialfall auflösbarer Gruppen mit lauter abelschen Sylowgruppen eine einfache Antwort gefunden. Beispiel 1 zeigt, daß im allgemeinen Falle die Verhältnisse wesentlich undurchsichtiger sind.

§ 7. Gruppen, deren sämtliche zweitmaximalen oder drittmaximalen Untergruppen invariant sind.

SCHMIDT [26] und IWASAWA [17] haben diejenigen endlichen Gruppen untersucht, deren eigentliche Untergruppen alle nilpotent sind. Diese Gruppen

ind auflösbar und, wenn die Gruppenordnung durch mindestens drei verschiedene Primzahlen teilbar ist, sogar nilpotent. Für uns wird eine ähnlich Aussage von Nutzen sein.

Satz 22. *Ist jede eigentliche Untergruppe von* $\mathfrak{G}$ *überauflösbar, so ist* $\mathfrak{G}$ *auflösbar. Falls die Ordnung von* $\mathfrak{G}$ *durch mindestens vier verschiedene Primzahlen teilbar ist, so ist* $\mathfrak{G}$ *selbst überauflösbar.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß $\mathfrak{G}$ auflösbar ist. Dabei wollen wir Induktion nach $(\mathfrak{G})$ anwenden.

Sei p der kleinste Primteiler von $(\mathfrak{G})$. Ist $\mathfrak{G}$ p-normal (s. Zassenhaus [*38*], S. 135), so betrachten wir den Normalisator $\mathfrak{N}$ des Zentrums $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_p)$ einer p-Sylowgruppe $\mathfrak{G}_p$ von $\mathfrak{G}$. Falls $\mathfrak{N} = \mathfrak{G}$, haben wir in $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_p)$ einen auflösbaren Normalteiler von $\mathfrak{G}$ nachgewiesen und erkennen mit Hilfe der Induktionsannahme die Auflösbarkeit von $\mathfrak{G}$. Ist $\mathfrak{N}$ eine eigentliche Untergruppe von $\mathfrak{G}$, so ist $\mathfrak{N}$ überauflösbar. Dann ist ${}_p\mathfrak{N} < \mathfrak{N}$ (Satz 7), und nach Grün (s. Zassenhaus [*38*], S. 135) existiert ein eigentlicher Normalteiler von $\mathfrak{G}$, dessen Faktorgruppe p-Potenzordnung hat. Da dieser Normalteiler überauflösbar ist, ist $\mathfrak{G}$ auflösbar. Ist aber $\mathfrak{G}$ nicht p-normal, so gibt es nach Burnside ([*3*], S. 156) eine p-Gruppe $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{G}$, deren Normalisator $\mathfrak{N}(\mathfrak{H})$ in $\mathfrak{H}$ Automorphismen von zu p teilerfremder Ordnung induziert. Für $\mathfrak{N}(\mathfrak{H}) \neq \mathfrak{G}$ ist dies unmöglich; denn da in diesem Falle $\mathfrak{N}(\mathfrak{H})$ überauflösbar ist, ist das p-Komplement von $\mathfrak{N}(\mathfrak{H})$ invariant in $\mathfrak{N}(\mathfrak{H})$, ist also mit $\mathfrak{H}$ elementweise vertauschbar. Somit haben wir notwendig $\mathfrak{N}(\mathfrak{H}) = \mathfrak{G}$, und wieder ist ein auflösbarer Normalteiler von $\mathfrak{G}$ nachgewiesen [8]).

Nun sei $(\mathfrak{G})$ durch mindestens vier verschiedene Primzahlen teilbar. Wir zeigen durch einen Induktionsschluß, daß $\mathfrak{G}$ überauflösbar ist. Die Primteiler von $(\mathfrak{G})$ seien nach fallender Größe geordnet: $p_1 > p_2 > \cdots > p_k$. Die Gruppen $\mathfrak{G}_{p_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ mögen im Sinne von P. Hall [*11*] ein Sylowsystem von $\mathfrak{G}$ bilden. Wegen der Überauflösbarkeit der Untergruppen $\mathfrak{G}_{p_1}\mathfrak{G}_{p_3}\mathfrak{G}_{p_4}\ldots\mathfrak{G}_{p_k}$ und $\mathfrak{G}_{p_1}\mathfrak{G}_{p_2}\mathfrak{G}_{p_4}\ldots\mathfrak{G}_{p_k}$ folgt $\mathfrak{G}_{p_1} < \mathfrak{G}_{p_1}\mathfrak{G}_{p_3}\mathfrak{G}_{p_4}\ldots\mathfrak{G}_{p_k}$ und $\mathfrak{G}_{p_1} \lhd \mathfrak{G}_{p_1}\mathfrak{G}_{p_2}\mathfrak{G}_{p_4}\ldots\mathfrak{G}_{p_k}$, also auch $\mathfrak{G}_{p_1} < \mathfrak{G}$. Die Zentrumselemente von $\mathfrak{G}_{p_1}$ der Ordnung p_1 erzeugen einen Normalteiler $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{G}$. Wir unterscheiden nun drei Fälle:

a) Ist $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{G}_{p_1}$, so ist ${}_{p_1}\mathfrak{G}\,\mathfrak{M}$ eine eigentliche Untergruppe von $\mathfrak{G}$, ist daher überauflösbar. Somit enthält $\mathfrak{M}$ einen Normalteiler $\mathfrak{N}$ der Ordnung p_1 von ${}_{p_1}\mathfrak{G}\,\mathfrak{M}$. Weil $\mathfrak{N}$ im Zentrum von $\mathfrak{G}_{p_1}$ liegt, ist $\mathfrak{N}$ auch in $\mathfrak{G}$ invariant. Wegen $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{G}_{p_1}$ ist die Ordnung von $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ noch durch mindestens vier verschiedene Primzahlen teilbar. Daher ist $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ nach unserer Induktionsannahme überauflösbar und dann $\mathfrak{G}$ ebenso.

b) Nun nehmen wir an, daß $\mathfrak{M} = \mathfrak{G}_{p_1}$, also $\mathfrak{G}_{p_1}$ elementar abelsch ist. Gibt es einen minimalen Normalteiler $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{G}$, dessen Ordnung keine Potenz von p_1 ist, so betrachten wir $\mathfrak{G}/\mathfrak{K}$. Ist $\mathfrak{K}$ keine volle Sylowgruppe von $\mathfrak{G}$, so sind in $\mathfrak{G}/\mathfrak{K}$ unsere Voraussetzungen erfüllt. Daher gibt es einen Normalteiler $\mathfrak{N}$

[8]) Dieser Teil des Beweises ist dem von Iwasawa genau nachgebildet; während p bei Iwasawa ein beliebiger Primteiler von $(\mathfrak{G})$ ist, mußten wir den kleinsten wählen, da in einer überauflösbaren Gruppe im allgemeinen nur das Komplement zum kleinsten Primteiler der Gruppenordnung invariant ist.

von $\mathfrak{G}$ mit $(\mathfrak{N}/\mathfrak{K}) = p_1$. Dann ist $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{G}_{p_1} \lhd \mathfrak{G}$ und $(\mathfrak{N} \cap \mathfrak{G}_{p_1}) = p_1$, womit wieder ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$ der Ordnung p_1 nachgewiesen ist. Ist aber $\mathfrak{K} = \mathfrak{G}_{p_i}$ eine volle Sylowgruppe von $\mathfrak{G}$, so enthält das überauflösbare p_i-Komplement ${}_{p_i}\mathfrak{G}$ einen Normalteiler $\mathfrak{N}$ der Ordnung p_1. Wegen $\mathfrak{G}_{p_1} \lhd \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{K} = \mathfrak{G}_{p_i} \lhd \mathfrak{G}$ gilt $(\mathfrak{G}_{p_1}, \mathfrak{G}_{p_i}) = \mathfrak{E}$. Daher ist $\mathfrak{N}$ invariant bei Transformation mit Elementen aus $\mathfrak{G}_{p_i}$ und aus ${}_{p_i}\mathfrak{G}$, also invariant in $\mathfrak{G}$. Damit ist ein Normalteiler $\mathfrak{N}$ der Ordnung p_1 nachgewiesen. Ist $p_1 (\mathfrak{G}/\mathfrak{N})$, so ist $(\mathfrak{G}/\mathfrak{N})$ noch durch mindestens vier verschiedene Primzahlen teilbar, daher $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ nach unserer Induktionsannahme überauflösbar. Ist aber $p_1 \nmid (\mathfrak{G}/\mathfrak{N})$, so ist $\mathfrak{G}/\mathfrak{N} \cong {}_{p_1}\mathfrak{G}$ überauflösbar als eigentlich Untergruppe von $\mathfrak{G}$. In jedem Falle erhalten wir so die Überauflösbarkeit von $\mathfrak{G}$.

c) Zu behandeln haben wir noch den Fall, daß jeder minimale Normalteiler von $\mathfrak{G}$ eine p_1-Potenz zur Ordnung hat. Dann ist $\mathfrak{G}_{p_1}$ maximaler nilpotenter Normalteiler von $\mathfrak{G}$ und enthält nach FITTING seinen Zentralisator (FITTING [6], S. 107 oder BAER [1], S. 646). Ist $\mathfrak{U}$ eine eigentliche Untergruppe von ${}_{p_1}\mathfrak{G}$, so ist $\mathfrak{U}\,\mathfrak{G}_{p_1}$ als eigentliche Untergruppe von $\mathfrak{G}$ überauflösbar. Nach Satz 4 liegt $\mathfrak{U}'$ im Zentralisator $\mathfrak{C}(\mathfrak{G}_{p_1})$ von $\mathfrak{G}_{p_1}$. Wegen $\mathfrak{C}(\mathfrak{G}_{p_1}) \leqq \mathfrak{G}_{p_1}$ folgt nun $\mathfrak{U}' \leqq \mathfrak{U} \cap \mathfrak{G}_{p_1} = \mathfrak{E}$. Also ist jede eigentliche Untergruppe von ${}_{p_1}\mathfrak{G}$ abelsch. Ist ${}_{p_1}\mathfrak{G}$ nicht abelsch, so gilt nach einem Satz von MILLER (s. etwa RÉDEI [25]) $({}_{p_1}\mathfrak{G}) = p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3}$; dann ist aber $(\mathfrak{G})$ nur durch drei verschiedene Primzahlen teilbar, was ausgeschlossen worden war. ${}_{p_1}\mathfrak{G}$ muß daher abelsch sein. Fassen wir $\mathfrak{G}_{p_1}$ als einen Modul mit ${}_{p_1}\mathfrak{G}$ als Automorphismenbereich auf, so erhalten wir eine wegen $\mathfrak{C}(\mathfrak{G}_{p_1}) \leqq \mathfrak{G}_{p_1}$ treue Darstellung von ${}_{p_1}\mathfrak{G}$ durch Matrizen mit Elementen aus dem GALOIS-Feld $GF(p_1)$. Nach der SCHURschen Fassung des Satzes von MASCHKE ist die Gruppe ${}_{p_1}\mathfrak{G}$ vollständig reduzibel in Bestandteile vom Grad 1. Diese Reduktion läßt sich sogar schon in $GF(p_1)$ durchführen, da jede eigentliche Untergruppe $\mathfrak{U}$ von ${}_{p_1}\mathfrak{G}$ sich wegen der Überauflösbarkeit von $\mathfrak{U}\,\mathfrak{G}_{p_1}$ in $GF(p_1)$ auf Diagonalgestalt bringen läßt. Jeder invariante Teilmodul von $\mathfrak{G}_{p_1}$ hat also die Dimension 1, was die Überauflösbarkeit von $\mathfrak{G}$ beweist.

Es gibt Gruppen, deren eigentliche Untergruppen alle überauflösbar sind, deren Gruppenordnung durch drei verschiedene Primzahlen teilbar ist, welche aber selbst nicht überauflösbar sind:

Beispiel 4. Die Elemente A, B, C, D mit den Relationen

$$A^7 = B^7 = C^3 = D^2 = E, \qquad AB = BA, \qquad CAC^{-1} = A^2, \qquad CBC^{-1} = B^4,$$
$$DAD^{-1} = B, \qquad DBD^{-1} = A, \qquad DCD^{-1} = C^{-1}$$

erzeugen eine Gruppe der Ordnung $7^2 \cdot 3 \cdot 2$, welche die geforderten Eigenschaften hat.

Definition 6. *$\mathfrak{V}$ heißt eine zweitmaximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$, wenn es ein $\mathfrak{U} < \mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{V} < \mathfrak{U}$ gibt.*

Satz 23. *Ist jede zweitmaximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$ invariant, so ist $\mathfrak{G}$ überauflösbar. Falls $(\mathfrak{G})$ durch mindestens drei verschiedene Primzahlen teilbar ist, ist $\mathfrak{G}$ sogar nilpotent.*

Beweis. Sei $\mathfrak{V} < \mathfrak{U} < \mathfrak{G}$. Dann ist $\mathfrak{V}$ invariant in $\mathfrak{G}$ und erst recht in $\mathfrak{U}$. Somit ist jede maximale Untergruppe von $\mathfrak{U}$ Normalteiler von $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}$ also nilpotent. Nach Satz 22 (oder schon nach dem Satz von IWASAWA-SCHMIDT) folgt, daß $\mathfrak{G}$ auflösbar ist. Ist $(\mathfrak{G})$ durch mindestens drei verschiedene Primzahlen teilbar, so ist $\mathfrak{G}$ nach IWASAWA nilpotent.

Um die Überauflösbarkeit zu zeigen, weisen wir nach, daß jede maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$ Primzahlindex hat: Sei $\mathfrak{V} < \mathfrak{U} < \mathfrak{G}$. Da $\mathfrak{U}$ nilpotent ist, ist $(\mathfrak{U}:\mathfrak{V})$ eine Primzahl p. $(\mathfrak{G}:\mathfrak{U})$ ist eine Primzahlpotenz. $\mathfrak{V}$ ist invariant in $\mathfrak{G}$. Im Falle $(\mathfrak{G}:\mathfrak{U}) = p^\alpha$ ist $(\mathfrak{G}/\mathfrak{V}) = p^{\alpha+1}$, und $\mathfrak{U}$ hat als maximale Untergruppe einer p-Gruppe den Index p. Ist aber $(\mathfrak{G}:\mathfrak{U}) = q^\beta$ mit $q \neq p$, so betrachten wir $\mathfrak{G}/\mathfrak{V} = \overline{\mathfrak{G}}$. $\mathfrak{U}$ entspricht eine maximale Untergruppe $\overline{\mathfrak{U}}$ von $\overline{\mathfrak{G}}$. Ist $\overline{\mathfrak{U}}$ invariant in $\overline{\mathfrak{G}}$, so haben wir $(\overline{\mathfrak{G}}/\overline{\mathfrak{U}}) = q$ und sind fertig. Im anderen Falle existiert ein minimaler Normalteiler $\overline{\mathfrak{N}}$ von $\overline{\mathfrak{G}}$ einer Ordnung $(\overline{\mathfrak{N}}) = q^\gamma$. Wegen $\overline{\mathfrak{N}}\,\overline{\mathfrak{U}} = \overline{\mathfrak{G}}$ folgt $\beta = \gamma$. Es gilt $\overline{\mathfrak{N}} < \overline{\mathfrak{G}}$ wegen $(\overline{\mathfrak{G}}/\overline{\mathfrak{N}}) = (\overline{\mathfrak{U}}) = p$. Ist $\overline{\mathfrak{M}} < \overline{\mathfrak{N}}$, so ist $\overline{\mathfrak{M}}$ als zweitmaximale Untergruppe von $\overline{\mathfrak{G}}$ invariant in $\overline{\mathfrak{G}}$. Da aber $\overline{\mathfrak{N}}$ ein minimaler Normalteiler von $\overline{\mathfrak{G}}$ ist, haben wir $\overline{\mathfrak{M}} = \mathfrak{E}$. Es folgt $(\overline{\mathfrak{N}}) = q$, also $\beta = 1$, was zu beweisen war.

Definition 7. *$\mathfrak{V}$ heißt eine drittmaximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$, wenn es eine zweitmaximale Untergruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{V} < \mathfrak{U}$ gibt.*

Satz 24. *Sei jede drittmaximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$ invariant. Dann gilt*: a) *Ist $(\mathfrak{G})$ durch mindestens drei verschiedene Primzahlen teilbar, so ist $\mathfrak{G}$ überauflösbar*; b) *$\mathfrak{G}'$ ist nilpotent*; c) *$r(\mathfrak{G}) \leq 2$.*

Beweis. Ist $\mathfrak{U} < \mathfrak{G}$, so ist jede zweitmaximale Untergruppe von $\mathfrak{U}$ als drittmaximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$ invariant in $\mathfrak{G}$ und daher auch in $\mathfrak{U}$. Nach Satz 23 ist $\mathfrak{U}$ überauflösbar, nach Satz 22 $\mathfrak{G}$ auflösbar. Wir bemerken noch, daß jede zweitmaximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$ nilpotent ist.

a) Jede maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ist überauflösbar. Enthält $(\mathfrak{G})$ mindestens vier verschiedene Primteiler, so ist $\mathfrak{G}$ nach Satz 22 überauflösbar. Im folgenden nehmen wir daher $(\mathfrak{G}) = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3}$ an $(p_1 > p_2 > p_3)$.

Sei zunächst $\mathfrak{G}_{p_1}$ nicht minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Ist $\mathfrak{N}$ ein in $\mathfrak{G}_{p_1}$ liegender minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$, so haben wir die Kette $\mathfrak{G} > \mathfrak{N}\,\mathfrak{G}_{p_2}\mathfrak{G}_{p_3} > \mathfrak{G}_{p_2}\mathfrak{G}_{p_3}$. Daher liegt $\mathfrak{G}_{p_2}\mathfrak{G}_{p_3}$ in einer zweitmaximalen Untergruppe von $\mathfrak{G}$ und ist somit nilpotent. $\mathfrak{G}_{p_2}$ und $\mathfrak{G}_{p_3}$ liegen in drittmaximalen Untergruppen von $\mathfrak{G}$, die invariant und nilpotent sind. Folglich ist $\mathfrak{G}_{p_2} \lhd \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}_{p_3} \lhd \mathfrak{G}$. Dann ist $\mathfrak{G}$ selbst nilpotent.

Weiterhin sei $\mathfrak{G}_{p_1}$ minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Dann ist $\mathfrak{G}_{p_1}$ elementar abelsch.

Sei nun $\mathfrak{G}_{p_2}\mathfrak{G}_{p_3}$ nilpotent. Ist $(\mathfrak{G}_{p_2}) \neq p_2$, so haben wir die Kette $\mathfrak{G} > \mathfrak{G}_{p_2} \times \mathfrak{G}_{p_3} > \overline{\mathfrak{G}}_{p_2} \times \mathfrak{G}_{p_3} > \mathfrak{G}_{p_3}$ mit einer eigentlichen Untergruppe $\overline{\mathfrak{G}}_{p_2} \neq \mathfrak{E}$ von $\mathfrak{G}_{p_2}$. Demnach liegt $\mathfrak{G}_{p_3}$ in einer drittmaximalen Untergruppe von $\mathfrak{G}$. Diese ist invariant und nilpotent, woraus $\mathfrak{G}_{p_3} \lhd \mathfrak{G}$ folgt. Dann sind $\mathfrak{G}_{p_1}$ und $\mathfrak{G}_{p_3}$ elementweise vertauschbar, und $\mathfrak{G} = \{\mathfrak{G}_{p_1}\mathfrak{G}_{p_2}\} \times \mathfrak{G}_{p_3}$ ist wegen der Überauflösbarkeit von $\mathfrak{G}_{p_1}\mathfrak{G}_{p_2}$ überauflösbar. Ebenso schließen wir, falls $(\mathfrak{G}_{p_3}) \neq p_3$. Ist aber

$(\mathfrak{G}_{p_2} \times \mathfrak{G}_{p_3}) = p_2\, p_3$, so ist $\mathfrak{G}_{p_2} \times \mathfrak{G}_{p_3}$ abelsch. Nun erhalten wir wie beim Beweis von Satz 22 die Überauflösbarkeit von $\mathfrak{G}$.

Sei schließlich $\mathfrak{G}_{p_2}\mathfrak{G}_{p_3}$ nicht nilpotent. Ist $\mathfrak{G}_{p_2}$ nicht minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}_{p_2}\mathfrak{G}_{p_3}$, so liegt $\mathfrak{G}_{p_3}$ in einer drittmaximalen Untergruppe von $\mathfrak{G}$, ist daher invariant in $\mathfrak{G}$. Daraus folgt zusammen mit $\mathfrak{G}_{p_2} \lhd \mathfrak{G}_{p_2}\mathfrak{G}_{p_3}$, daß $\mathfrak{G}_{p_2}\mathfrak{G}_{p_3}$ nilpotent ist, was aber gerade ausgeschlossen wurde. Somit ist $\mathfrak{G}_{p_2}$ minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}_{p_2}\mathfrak{G}_{p_3}$. Wegen der Überauflösbarkeit von $\mathfrak{G}_{p_2}\mathfrak{G}_{p_3}$ folgt $(\mathfrak{G}_{p_2}) = p_2$. Ist $(\mathfrak{G}_{p_3}) = p_3^{\alpha}$ mit $\alpha \geqq 2$, so ist $\mathfrak{G}_{p_1}\mathfrak{G}_{p_2}$ enthalten in einer zweitmaximalen Untergruppe von $\mathfrak{G}$, ist also nilpotent. Daher ist $\mathfrak{G}_{p_2}$ invariant in $\mathfrak{G}$, und die Gruppen $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_{p_1} \cong \mathfrak{G}_{p_1}\mathfrak{G}_{p_3}$ und $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_{p_2} \cong \mathfrak{G}_{p_1}\mathfrak{G}_{p_3}$ sind überauflösbar. Nach Hilfssatz 2 ist auch $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_{p_1} \cap \mathfrak{G}_{p_2} \cong \mathfrak{G}$ überauflösbar. Sei schließlich $(\mathfrak{G}_{p_3}) = p_3$. $\mathfrak{G}_{p_1}$ ist dann zweitmaximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$ und jede maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}_{p_1}$ ist invariant in $\mathfrak{G}$. Da $\mathfrak{G}_{p_1}$ ein minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist, folgt $(\mathfrak{G}_{p_1}) = p_1$. Dann haben wir $(\mathfrak{G}) = p_1\, p_2\, p_3$, und $\mathfrak{G}$ ist auch in diesem Falle überauflösbar.

b) Nun zeigen wir durch Induktion nach $(\mathfrak{G})$, daß $\mathfrak{G}'$ nilpotent ist. Wegen a) und Satz 8 können wir uns beschränken auf den Fall $(\mathfrak{G}) = p^{\alpha}\, q^{\beta}$.

$\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ seien von $\mathfrak{E}$ verschiedene Normalteiler von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2 = \mathfrak{E}$. Die Induktionsannahme liefert uns die Nilpotenz von $\mathfrak{G}'\,\mathfrak{N}_i/\mathfrak{N}_i \cong \mathfrak{G}'/\mathfrak{G}' \cap \mathfrak{N}_i$, woraus folgt, daß auch $\mathfrak{G}'/\mathfrak{G}' \cap \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2 \cong \mathfrak{G}'$ nilpotent ist. Weiterhin dürfen wir daher annehmen, daß $\mathfrak{G}$ nur einen einzigen minimalen Normalteiler besitzt. Dann hat $\mathfrak{F}(\mathfrak{G})$ Primzahlpotenzordnung, etwa $(\mathfrak{F}) = p^{\gamma}$. Wäre $\beta > 2$, so gäbe es eine drittmaximale Untergruppe $\mathfrak{V}$ von $\mathfrak{G}$, deren Ordnung durch q teilbar wäre. Wegen $\mathfrak{V} < \mathfrak{G}$ und der Nilpotenz von $\mathfrak{V}$ würde folgen $\mathfrak{E} \neq \mathfrak{V}_q \lhd \mathfrak{G}$ im Widerspruch zu $(\mathfrak{F}) = p^{\gamma}$. Also ist $\beta \leqq 2$ und daher $\mathfrak{G}_q' = \mathfrak{E}$. Ist $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_p$, so folgt wegen $\mathfrak{G}_q' = \mathfrak{E}$, daß $\mathfrak{G}' \leqq \mathfrak{G}_p$, also $\mathfrak{G}'$ nilpotent ist. Aus $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{G}_p$ erhalten wir $\mathfrak{F}\,\mathfrak{G}_q \neq \mathfrak{G}$. Ist $\overline{\mathfrak{G}}_q < \mathfrak{G}_q$, so liegt $\mathfrak{F}\,\overline{\mathfrak{G}}_q$ in einer zweitmaximalen Untergruppe von $\mathfrak{G}$, ist daher nilpotent. Daraus ergibt sich $\overline{\mathfrak{G}}_q < \mathfrak{C}(\mathfrak{F}) \leqq \mathfrak{F}$ (FITTING [6], S. 107), also $\overline{\mathfrak{G}}_q = \mathfrak{E}$ und $(\mathfrak{G}_q) = q$. Sei $\mathfrak{U}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$ von Primzahlindex. Ist $(\mathfrak{G}/\mathfrak{U}) = q$, so folgt $\mathfrak{G}' \leqq \mathfrak{G}_p = \mathfrak{U}$, und wir sind fertig. Sei daher $(\mathfrak{G}/\mathfrak{U}) = p$. Wäre $q > p$, so hätten wir wegen der Überauflösbarkeit von $\mathfrak{U}$ die Aussage $\mathfrak{U}_q = \mathfrak{G}_q \lhd \mathfrak{U}$ (Satz 7), also auch $\mathfrak{G}_q \lhd \mathfrak{G}$, im Widerspruch zu $(\mathfrak{F}) = p^{\gamma}$. Daher ist $p > q$ und $\mathfrak{U}_p < \mathfrak{G}$. $\mathfrak{G}/\mathfrak{U}_p$ hat die Ordnung $p\,q$, besitzt daher wegen $p > q$ einen Normalteiler der Ordnung p. Daraus folgt $\mathfrak{G}_p \lhd \mathfrak{G}$ und dann $\mathfrak{G}' \leqq \mathfrak{G}_p$, womit die Behauptung bewiesen ist.

c) Beim Nachweis, daß $\mathfrak{G}$ höchstens den Rang 2 hat, können wir uns wegen a) wieder auf den Fall $(\mathfrak{G}) = p^{\alpha}\, q^{\beta}$ beschränken. Wieder führen wir den Beweis durch Induktion nach $(\mathfrak{G})$.

Sei $\mathfrak{N}$ ein minimaler Normalteiler der Ordnung p^{ν} von $\mathfrak{G}$. Hat $\mathfrak{G}$ einen Normalteiler $\mathfrak{K}$ einer Ordnung $q^{\mu} \neq 1$, so folgt aus der Induktionsannahme die Existenz eines $\overline{\mathfrak{N}}$ mit $\mathfrak{K}\,\overline{\mathfrak{N}}/\mathfrak{K} \leqq \mathfrak{G}/\mathfrak{K}$, $(\overline{\mathfrak{N}}) \mid p^2$ und $\overline{\mathfrak{N}} \leqq \mathfrak{N}$. Also ist $\mathfrak{K}\,\overline{\mathfrak{N}} \lhd \mathfrak{G}$. Wegen $(\mathfrak{K}, \overline{\mathfrak{N}}) \leqq \mathfrak{K} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{E}$ folgt $\mathfrak{K}\,\overline{\mathfrak{N}} = \mathfrak{K} \times \overline{\mathfrak{N}}$. Daher ist $\overline{\mathfrak{N}} \lhd \mathfrak{G}$. Der Rest der Behauptung ergibt sich nun leicht durch Anwendung der Induktionsannahme auf $\mathfrak{G}/\overline{\mathfrak{N}}$.

Gibt es in $\mathfrak{G}$ keinen Normalteiler einer Ordnung $q^{\nu} \neq 1$ mit $q \neq p$, so haben wir $(\mathfrak{F}) = p^{\nu}$. Da $\mathfrak{G}'$ nilpotent ist, ist auch $(\mathfrak{G}') = p^{\alpha}$, woraus $\mathfrak{G}_p \lhd \mathfrak{G}$ folgt. Nun sei $\mathfrak{N}$ ein minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$, der in $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}_p)$ liegt. Ist $\mathfrak{N} \neq \mathfrak{G}_p$, so ist $\mathfrak{N}$ minimaler Normalteiler in der eigentlichen Untergruppe $\mathfrak{N}\,\mathfrak{G}_q$ von $\mathfrak{G}$, die überauflösbar ist. Also haben wir $(\mathfrak{N}) = p$. Ist aber $\mathfrak{N} = \mathfrak{G}_p$, so ist $\mathfrak{G}_q$ maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$. Eine zweitmaximale Untergruppe von $\mathfrak{G}_q$ ist invariant in $\mathfrak{G}$, muß also wegen $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_p$ gleich der Einheitsgruppe $\mathfrak{E}$ sein. Daher ist $(\mathfrak{G}_q) \mid q^2$. Falls $(\mathfrak{G}_q) = q^2$, so ist eine maximale Untergruppe von $\mathfrak{N}$, welche in $\mathfrak{N}$ den Index p hat, drittmaximal in $\mathfrak{G}$, also invariant. Daraus folgt, da $\mathfrak{N}$ minimaler Normalteiler ist, daß $(\mathfrak{N}) = p$ gilt. Ist aber $(\mathfrak{G}_q) = q$, so ist eine zweitmaximale Untergruppe von $\mathfrak{N}$ invariant in $\mathfrak{N}$, also gleich $\mathfrak{E}$. Daher haben wir in diesem Falle $(\mathfrak{N}) \mid p^2$. Damit ist nachgewiesen, daß ein geeigneter minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$ höchstens zwei Erzeugende hat. Die volle Behauptung folgt nun leicht durch Anwendung der Induktionsvoraussetzung auf $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$.

Satz 24 ist damit in allen Teilen bewiesen.

Die alternierende Gruppe $\mathfrak{A}_4$ in vier Symbolen liefert das einfachste Beispiel einer Gruppe, deren drittmaximale Untergruppen alle invariant sind, welche aber nicht überauflösbar ist. Somit läßt sich Aussage a) von Satz 24 nicht auf Gruppen der Ordnung $p^{\alpha} q^{\beta}$ ausdehnen.

Es gibt überraschend viele einfache Gruppen, deren sämtliche Maximalketten nicht mehr als vier Glieder umfassen, deren sämtliche viertmaximalen Untergruppen also der Einheitsgruppe $\mathfrak{E}$ gleich sind. Die Gruppe niedrigster Ordnung dieser Art ist die Ikosaedergruppe $\mathfrak{A}_5$. Ferner gehören dazu die linearen Gruppen $PSL(2,13)$, $PSL(2,43)$, $PSL(2,67)$ und $PSL(2,173)$. Da alle Untergruppen von $PSL(2, p)$ bekannt sind, kann man leicht angeben, wann $\mathfrak{E}$ die einzige viertmaximale Untergruppe von $PSL(2, p)$ ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $p - 1$ und $p + 1$ Produkt von höchstens drei Primzahlen sind und wenn noch gilt $p \not\equiv \pm 1$ (5) und $p \not\equiv \pm 1$ (8). Die oben angegebenen Primzahlen sind unterhalb 200 die einzigen mit dieserEigenschaft.

Literatur.

[1] Baer, R.: Nilpotent characteristic subgroups of finite groups. Amer. J. Math. **75**, 633—664 (1953). — [2] Baer, R.: Group elements of prime power index. Trans. Amer. Math. Soc. **75**, 20—47 (1953). — [3] Burnside, W.: Theory of groups of finite order, 2. Aufl. 1911. — [4] Burnside, W.: On soluble irreducible groups of linear substitutions in a prime number of variables. Acta math. **27**, 217—224 (1903). — [5] Clifford, A. H.: Representations induced in an invariant subgroup. Ann. of Math. II **38**, 533—550 (1937). — [6] Fitting, H.: Beiträge zur Theorie der Gruppen endlicher Ordnung. Jber. dtsch. Math. Ver. **48**, 77—141 (1938). — [7] Frucht, R.: Über die Darstellung endlicher Abelscher Gruppen durch Kollineationen. J. für Math. **166**, 16—29 (1932). — [8] Gaschütz, W.: Über die Φ-Untergruppe endlicher Gruppen. Math. Z. **58**, 160—170 (1953). — [9] Hall, P.: A note on soluble groups. J. London Math. Soc. **3**, 98—105 (1928). — [10] Hall, P.: A contribution to the theory of groups of prime power orders. Proc. London Math. Soc. (2) **36**, 29—95 (1933). — [11] Hall, P.: On the Sylow systems of a soluble group. Proc. London Math. Soc. (2) **43**, 316—323 (1937). — [12] Hall, P.: The construction of soluble groups. J. für Math. **182**, 206—214 (1940). — [13] Huppert,

B.: Monomiale Darstellung endlicher Gruppen. Nagoya Math. J. **6**, 93—94 (1953). — [*14*] Itô, N.: Note on (LM)-groups of finite orders. Kōdai Math. Sem. Rep. **1951**, 1—6. — [*15*] Itô, N.: Note on A-groups. Nagoya Math. J. **4**, 79—81 (1952). — [*16*] Itô, N.: On the factorizations of the linear fractional group $LF(2, p^n)$. Acta Sci. Math. Szeged **15**, 79—84 (1953). — [*17*] Iwasawa, K.: Über die Struktur der endlichen Gruppen, deren echte Untergruppen sämtlich nilpotent sind. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap. (3) **23**, 1—4 (1941). — [*18*] Kaloujnine, L.: Sur quelques propriétés des groupes d'automorphismes d'un groupe abstrait. C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 2067—2069 (1950). — [*19*] Kaloujnine, L.: Sur quelques propriétés des groupes d'automorphismes d'un group abstrait. (Généralisation d'un théorème de M. Ph. Hall.) C. r. Acad. Sci., Paris **231**, 400—402 (1950). — [*20*] Kochendörffer, R.: Über treue irreduzible Darstellungen endlicher Gruppen. Math. Nachr. **1**, 25—39 (1948). — [*21*] Levi, F., u. v. d. Waerden, B. L.: Über eine besondere Klasse von Gruppen. Hamburger Abh. **9**, 154—158 (1933). — [*22*] Mitchell, H. H.: Ternary linear groups. Trans. Amer. Math. Soc. **12**, 207—242 (1911). — [*23*] Ore, O.: Contributions to the theory of groups of finite orders. Duke Math. J. **5**, 431—460 (1938). — [*24*] Perron, O.: Algebra II, 2. Aufl. 1933. — [*25*] Rédei, L.: Das schiefe Produkt in der Gruppentheorie. Comm. Math. Helv. **20**, 225—264 (1947). — [*26*] Schmidt, O.: Über Gruppen, deren sämtliche Teiler spezielle Gruppen sind. Rec. math. Moscou **31**, 366—372 (1924). — [*27*] Speiser, A.: Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, 3. Aufl. 1937. — [*28*] Taunt, D. R.: On A-groups. Proc. Cambridge Phil. Soc. **45**, 24—42 (1949). — [*29*] Waerden, B. L. v. d.: Moderne Algebra II, 2. Aufl. 1940. — [*30*] Waerden, B. L. v. d.: Gruppen von linearen Transformationen. Ergebn. Math. **4** (1935). — [*31*] Wendt, E.: Über eine specielle Classe von Gruppen. Math. Ann. **55**, 479—492 (1902). — [*32*] Weyl, H.: Gruppentheorie und Quantenmechanik. 1928. — [*33*] Wielandt, H.: Eine Kennzeichnung der direkten Produkte von p-Gruppen. Math. Z. **41**, 281—282 (1936). — [*34*] Wielandt, H.: p-Sylowgruppen und p-Faktorgruppen. J. für Math. **182**, 180—193 (1940). — [*35*] Wielandt, H.: Zum Satz von Sylow. Math. Z. **60**, 407—408 (1954). — [*36*] Zappa, G.: Sui gruppi supersolubili. Rend. Sem. Mat. Roma IV **2**, 323—330 (1938). — [*37*] Zappa, G.: Sui sottogruppi finiti dei gruppi di Hirsch. Giorn. Mat. Battaglini **78**, 55—70 (1948). — [*38*] Zassenhaus, H.: Lehrbuch der Gruppentheorie. I. 1937.

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 30. April 1954.)

Thimm, W.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 435—457 (1954)

Meromorphe Abbildungen von Riemannschen Bereichen.

Von
Walter Thimm.

Inhalt.

Seite
Einleitung 435
§ 1. Riemannsche Elementarbereiche 436
§ 2. Riemannsche Bereiche 439
§ 3. Parameterabhängige analytische Mengen in Riemannschen Elementarbereichen 441
§ 4. Kanonische Mengen in Riemannschen Bereichen 445
§ 5. Fasermengen meromorpher Abbildungen 450
§ 6. Funktionen auf der Fasergesamtheit einer meromorphen Abbildung 453
Literaturverzeichnis 457

Einleitung. Angeregt durch das Beispiel der mehrfach periodischen, meromorphen Funktionen hat man in der Funktionentheorie von mehreren komplexen Variablen zunächst den Begriff der *komplexen Mannigfaltigkeit* in den Vordergrund geschoben, obgleich klar ist, daß die Forderung nach der Mannigfaltigkeitseigenschaft der Existenzbereiche eine unzulässige Einschränkung der Funktionentheorie bedeutet; haben doch nicht einmal die Eindeutigkeitsbereiche algebraischer Funktionen von mehreren Variablen diesen Charakter[1]). Man muß also verzweigte Definitionsgebiete zulassen. Unter den verschiedenen Definitionen verzweigter funktionentheoretischer Bereiche, sog. *Riemannscher Bereiche*, scheint die von Behnke und Stein[1]) angegebene die zweckmäßigste zu sein, weil sie topologisch vorgeht. Unter Zugrundelegung dieser Definition wird eine Theorie der analytischen Mengen auf Riemannschen Bereichen entwickelt. Die Ergebnisse werden auf die Beschreibung der Urbildmengen von meromorphen Abbildungen derartiger Bereiche angewandt. Daraus ergeben sich Beweise für die Hauptsätze über algebraische Abhängigkeit von meromorphen Funktionen auf kompakten Riemannschen Bereichen. Es zeigt sich, daß die vom Verfasser in früheren Arbeiten dargestellte Untersuchungsmethode meromorpher Abbildungen auch im vorliegenden Fall verwendbar ist, ja in ihm ihre Krönung und ihren Abschluß findet. Diese Methode erscheint wegen der vielen unvermeidlichen Einzelbeweisschritte recht kompliziert, und es ist die Gefahr nicht von der Hand zu weisen, daß die großen Linien der Gedankengänge im Gestrüpp der Einzeltatsachen untertauchen. Daher hat sich der Verfasser — angeregt durch Herrn E. Peschl — entschlossen, in dieser Arbeit die Hauptideen zusammenfassend darzustellen, selbst wenn Ergebnisse früherer Arbeiten dazu wiederholt werden müssen.

[1]) [2], S. 4.

Um den Umfang dieser Arbeit nicht zu groß anschwellen zu lassen, sind einige Beweise hier nicht in allen Einzelheiten angegeben; es werden jedoch immer die wesentlichen Gesichtspunkte hervorgehoben, um das Verständnis der tragenden Ideen zu ermöglichen.

§1. Riemannsche Elementarbereiche.

1.1. *Ein $2n$-dimensionaler Riemannscher Elementarbereich $\mathfrak{X}$ wird als verzweigter Überlagerungskomplex folgendermaßen erklärt:*

Der simpliziale Komplex X sei ein (schlichtes) Gebiet des $\{x_1, \ldots, x_n\} = (x)_n = x$-Raumes. In X sei die Funktion $v(x)$ analytisch; ihre Nullstellenmenge V in X sei ein $2n-2$-dimensionaler Teilkomplex von X. $\mathfrak{X}$ sei eine $2n$-dimensionale Pseudomannigfaltigkeit. Es gebe eine simpliziale Abbildung A von $\mathfrak{X}$ auf X, die sog. Projektion, die jedes Simplex von $\mathfrak{X}$ auf ein gleichdimensionales Simplex von X abbildet. Jedes Simplex von X ist Bild wenigstens eines Simplex von $\mathfrak{X}$; jedes Simplex von $X - V$ ist Bild von r verschiedenen Simplexen von $\mathfrak{X}$; jedes Simplex von V ist Bild von höchstens r Simplexen von $\mathfrak{X}$. Ist $\mathfrak{V} = A^{-1}(V)$, so sei A in $\dot{\mathfrak{X}} = \mathfrak{X} - \mathfrak{V}$ im kleinen topologisch; d.h. jeder Punkt in $\dot{\mathfrak{X}}$ besitze eine Umgebung, die durch A topologisch auf eine Umgebung des Bildpunktes abgebildet werde. $\dot{\mathfrak{X}}$ ist eine komplexe Mannigfaltigkeit, die *„zu $\mathfrak{X}$ gehörige Mannigfaltigkeit"*. Der Stern jedes Simplexes von $\mathfrak{V}$ sei eine regulär zusammenhängende $2n$-dimensionale Pseudomannigfaltigkeit. Der Komplex $\mathfrak{V}$ heiße *Verzweigungsmenge* von $\mathfrak{X}$, und V werde *Verzweigungsprojektion* von $\mathfrak{X}$ genannt.

1.2. Der Riemannsche Elementarbereich $\mathfrak{X}$ sei in den $\{x_1, \ldots, x_N\}$-Raum $(N > n)$ *eingebettet*, wenn die zu $\mathfrak{X}$ gehörige Mannigfaltigkeit unter Wahrung der Überlagerungseigenschaft topologisch äquivalent zu einer Teilmenge dieses Raumes ist, d.h. entspricht dem Punkte $\mathfrak{P}_0$ bei dieser Homöomorphie der Punkt $(x^0)_N$, so sei $A(\mathfrak{P}_0) = (x^0)_n$.

1.3. Es sei $\mathfrak{X}$ ein Riemannscher Elementarbereich mit den folgenden zusätzlichen Eigenschaften:

a) X sei eine simpliziale Umgebung des Nullpunktes 0 des $(x)_n$-Raumes (ohne Rand).

b) $\mathfrak{X}$ sei regulär zusammenhängend.

c) Die Menge $A^{-1}(0)$ erhalte nur einen Punkt $\mathfrak{O}$, der Eckpunkt jedes $2n$-dimensionalen Simplexes von $\mathfrak{X}$ sei.

Dann heiße $\mathfrak{X}$ Riemannsche Elementarumgebung des Punktes $\mathfrak{O}$.

1.4. Der reguläre Zusammenhang einer Riemannschen Elementarumgebung bleibt erhalten, wenn $\mathfrak{X}$ durch Verkleinerung der Projektion X eingeengt wird; genauer: Die Umgebung U von 0 werde beliebig vorgegeben. Dann gibt es eine simpliziale Umgebung $X_1 \subset U$ von 0, so daß $A^{-1}(X_1)$ eine Riemannsche Elementarumgebung von $\mathfrak{O}$ ist.

1.5. In Riemannschen Elementarbereichen werden (eindeutige) Funktionen gebildet. *Eine in $\mathfrak{X}$ definierte Funktion $f(\mathfrak{P})$ heiße analytisch in $\mathfrak{X}$, wenn sie*

(1) *in* $\mathfrak{X}$ *stetig und* (2) *in der zu* $\mathfrak{X}$ *gehörigen Mannigfaltigkeit* $\dot{\mathfrak{X}}$ *analytisch ist.* Die zweite Bedingung verlangt: Jeder Punkt $\mathfrak{Q}$ von $\dot{\mathfrak{X}}$ hat in $\dot{\mathfrak{X}}$ eine Umgebung $\mathfrak{U}(\mathfrak{Q})$, die durch die Projektion A topologisch auf eine Umgebung $U(\bar{x})$ des Punktes $\bar{x} = A(\mathfrak{Q})$ abgebildet wird. Dann sei fA^{-1} in $U(\bar{x})$ analytisch.

Eine in $\mathfrak{X}$ *definierte Funktion heiße meromorph, wenn sie Quotient zweier in* $\mathfrak{X}$ *analytischer Funktionen ist.* Dabei darf ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, daß die Nennerfunktion $g(\mathfrak{P}) = g(A\,\mathfrak{P}) = g(x)$ sogar in X analytisch ist.

Natürlich gibt es analytische und meromorphe Funktionen in $\mathfrak{X}$; denn jede in X analytische bzw. meromorphe Funktion $f(x)$ ist eine solche, wenn wir definieren $f(\mathfrak{P}) = f(A\,\mathfrak{P})$. Ein noch ungelöstes Problem ist die Frage, unter welchen Bedingungen $\mathfrak{X}$ Teilgebiet des Regularitätsbereiches einer analytischen Funktion ist, oder mit anderen Worten, wann es eine analytische Funktion gibt, die in übereinanderliegenden Punkten von $\mathfrak{X}$ verschiedene Funktionselemente hat. Diese Frage soll nicht untersucht werden. Wir wenden uns vielmehr der Betrachtung der analytischen Mengen in $\mathfrak{X}$ zu.

1.6. *Eine analytische Menge in* $\mathfrak{X}$ *sei die Menge der gemeinsamen Nullstellen von in* $\mathfrak{X}$ *analytischen Funktionen.* Die Aufgabe der Bestimmung von analytischen Mengen in $\mathfrak{X}$ hat eine topologische und eine funktionentheoretische Seite. Der topologische Teil betrifft das „Durchdrücken" von analytischen Mengen aus der Projektion in $\mathfrak{X}$. Den uns allein interessierenden Fall beschreibt folgender Satz:

Der Teilkomplex K von X sei eine regulär zusammenhängende, s-dimensionale Pseudomannigfaltigkeit, deren Rand auf dem Rande von X liege. Der Komplex $K \cap V$ enthalte nur Simplexe, deren Dimension $\leqq s-2$ ist. Es sei P ein Punkt von $\dot{K} = K - K \cap V$ und $\mathfrak{P}$ ein Punkt von $A^{-1}(P)$. Dann existiert in $\mathfrak{X}$ eine regulär zusammenhängende Pseudomannigfaltigkeit $\mathfrak{K}$ mit $K = A(\mathfrak{K})$, deren Rand auf dem Rande von $\mathfrak{X}$ liegt und die den Punkt $\mathfrak{P}$ enthält. $\mathfrak{K}$ ist eindeutig bestimmt. Ist $\mathfrak{K}^*$ eine von $\mathfrak{K}$ verschiedene regulär zusammenhängende Teil-Pseudomannigfaltigkeit in $\mathfrak{X}$ mit der gleichen Projektion, so liegt $\mathfrak{K}^* \cap \mathfrak{K}$ in der Verzweigungsmenge $\mathfrak{B}$.

1.7. Dieser topologische Satz ermöglicht folgende Konstruktion von regulär zusammenhängenden Stücken analytischer Mengen: $\mathfrak{X}$ sei eine Riemannsche Elementarumgebung des Punktes $\mathfrak{O}$. Gegeben sei in X eine in 0 irreduzible analytische Mannigfaltigkeit E, die ein Teilkomplex von X sei. Der Rand von E liege auf dem Rande von X. Es gehöre E nicht zu der Verzweigungsprojektion V. P sei ein Punkt von $\dot{E} = E - E \cap V$ und $\mathfrak{P}$ ein Überlagerungspunkt von P. Da E eine Pseudomannigfaltigkeit in X ist, existiert in $\mathfrak{X}$ eine E überlagernde regulär zusammenhängende Pseudomannigfaltigkeit $\mathfrak{E}$ mit $\mathfrak{P} \in \mathfrak{E}$. Wir nennen $\mathfrak{E}$ *Primkeim* des Punktes $\mathfrak{O}$ (in $\mathfrak{X}$)[2]. Es seien $\mathfrak{X}_1$ und $\mathfrak{X}_2$ Riemannsche Elementarumgebungen von $\mathfrak{O}$ in $\mathfrak{X}$, vgl. 1.4. $\mathfrak{E}_1$ sei Primkeim von $\mathfrak{O}$ in $\mathfrak{X}_1$, und $\mathfrak{E}_2$ sei Primkeim von $\mathfrak{O}$ in $\mathfrak{X}_2$. Dann sei $\mathfrak{E}_1$ in $\mathfrak{E}_2$ enthalten

[2]) Den eingeklammerten Zusatz lassen wir meistens weg.

$-\mathfrak{E}_1 < \mathfrak{E}_2 -$, wenn es eine Umgebung $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{O}$ in $\mathfrak{X}_1 \cap \mathfrak{X}_2$ gibt, so daß $\mathfrak{E}_1 \cap \mathfrak{U} < \mathfrak{E}_2 \cap \mathfrak{U}$ gilt. Es sei $\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}_2$, wenn $\mathfrak{E}_1 < \mathfrak{E}_2$ und $\mathfrak{E}_2 < \mathfrak{E}_1$ ist.

1.8. Die Menge $A^{-1}(E)$ ist analytisch in $\mathfrak{X}$; sie ist eine Pseudomannigfaltigkeit, deren reguläre Komponenten Primkeime des Punktes $\mathfrak{O}$ mit der Projektion E sind. Der Durchschnitt von je zwei dieser Primkeime liegt nach 1.6 in der Verzweigungsmenge $\mathfrak{V}$ von $\mathfrak{X}$. Es bleibe die Frage offen, ob jeder Primkeim eine analytische Menge im Sinne der Definition 1.6, d.h. volle Nullstellenmenge von in $\mathfrak{X}$ analytischen Funktionen ist; übrigens hängt dieses Problem mit der in 1.5 erwähnten Frage zusammen.

1.9. Unter Benutzung des Ergebnisses 1.8 folgt: Sind $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ Primkeime von $\mathfrak{O}$ in $\mathfrak{X}$, so liegt $\mathfrak{E}_1$ in $\mathfrak{E}_2$ oder der Durchschnitt von $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ hat eine topologische Dimension, die um 2 kleiner als die topologische Dimension von $\mathfrak{E}_1$ ist.

1.10. Primkeime sind Bausteine zum Aufbau von analytischen Mengen. Die Definition des Primkeimes zeigt jedoch, daß nur solche analytischen Mengen $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{X}$ Vereinigungen von Primkeimen sein können, die in der folgenden Weise „gewöhnlich" zur Verzweigungsmenge $\mathfrak{V}$ von $\mathfrak{X}$ liegen:

Bedingung der gewöhnlichen Lage.

Die Menge $\mathfrak{M}$ sei gewöhnlich in $\mathfrak{X}$, wenn $\mathfrak{M} - \mathfrak{M} \cap \mathfrak{V}$ dicht in $\mathfrak{M}$ ist.

1.11. Ähnlich wie der sog. zweite Weierstraßsche Satz ([*1*], S. 132) wird der folgende Satz bewiesen:

Es sei $\mathfrak{M}$ eine gewöhnliche analytische Menge in der Riemannschen Elementarumgebung $\mathfrak{X}$ von $\mathfrak{O}$. Dann gibt es eine Umgebung $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{O}$ in $\mathfrak{X}$, so daß $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{U}$ Vereinigungsmenge von endlich vielen Primkeimen des Punktes $\mathfrak{O}$ in $\mathfrak{U}$ ist.

1.12. Die Architektur eines Primkeimes wird besonders durchsichtig, wenn wir uns der sog. kanonischen Darstellung der irreduziblen analytischen Mannigfaltigkeit E bedienen. Ist ϱ die Dimension von E, so ist E bei geeigneter Wahl der Koordinaten $(y)_n$, die durch Ausführung einer passenden nicht ausgearteten linearen Transformation der $(x)_n$ erfolgen kann, eine in den $(y)_n$-Raum eingebettete Riemannsche Elementarumgebung über einer Umgebung $Y^{(\varrho)}$ des Nullpunktes des $(y)_\varrho$-Raumes. Für die Irreduzibilität von E ist charakteristisch, daß der reguläre Zusammenhang von E nicht aufhört, wenn E durch Verkleinerung der Projektion $Y^{(\varrho)}$ eingeengt wird (vgl. 1.4). Der Übergang von E zum Primkeim $\mathfrak{E}$ überhöht die Überlagerung E von $Y^{(\varrho)}$ um einen zweiten Schritt, d.h. ist B die Projektion von E auf $Y^{(\varrho)}$, so kann $\mathfrak{E}$ gedeutet werden als eine Riemannsche Elementarumgebung mit der Projektionsabbildung BA von $\mathfrak{E}$ auf $Y^{(\varrho)}$, wobei der reguläre Zusammenhang von $\mathfrak{E}$ bei Verkleinerung der Projektion $Y^{(\varrho)}$ erhalten bleibt.

1.13. Diese Erklärung legt eine Verallgemeinerung des Primkeimbegriffes dadurch nahe, daß in seiner Definition der Begriff „Riemannsche Elementarumgebung" durch den Begriff „Riemannscher Elementarbereich" ersetzt wird: Im Riemannschen Elementarbereich $\mathfrak{X}$ sei $\mathfrak{M}$ eine Pseudomannigfaltigkeit, welche die Bedingung der gewöhnlichen Lage erfüllt. $\mathfrak{M}$ heiße *kanonischer*

Keim, wenn der Rand von $\mathfrak{M}$ auf dem Rande von $\mathfrak{X}$ liegt, wenn $M = A(\mathfrak{M})$ eine analytische Menge in X und ein in den $(y)_n$-Raum eingebetteter Riemannscher Elementarbereich über einem Gebiet $Y^{(\varrho)}$ des $(y)_\varrho$-Raumes ist. Auch $\mathfrak{M}$ sei ein Riemannscher Elementarbereich über $Y^{(\varrho)}$.

Man hat bei einem kanonischen Keim also zwei Projektionen: 1. Die Projektion $M = A(\mathfrak{M})$, 2. die Projektion von $\mathfrak{M}$ auf $Y^{(\varrho)}$, die wir zur Unterscheidung von A *„Keimprojektion"* nennen.

Als Riemannscher Elementarbereich besitzt $\mathfrak{M}$ eine Verzweigungsmenge $\mathfrak{V}(\mathfrak{M})$ und eine Verzweigungsprojektion $v(\mathfrak{M})$, die durch eine analytische Gleichung $v(y)_\varrho = 0$ in $Y^{(\varrho)}$ bestimmt wird. $\dot{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M} - \mathfrak{V}(\mathfrak{M})$ ist eine unverzweigte Überlagerungsmannigfaltigkeit von $Y^{(\varrho)} - v(\mathfrak{M})$.

Die regulär zusammenhängenden Komponenten eines kanonischen Keimes sind kanonische Keime mit derselben Keimprojektion. $\mathfrak{M}$ ist dann und nur dann regulär zusammenhängend, wenn $\dot{\mathfrak{M}}$ zusammenhängend (durch Kurven) ist.

1.14. Nachdem das Werkzeug zum Betreiben einer „lokalen" Funktionentheorie in Riemannschen Elementarumgebungen bereitliegt, kann der Schritt zur „globalen" Funktionentheorie vollzogen werden.

§ 2. Riemannsche Bereiche.

2.1. Ein *Riemannscher Bereich* sei ein zusammenhängender topologischer Raum $\mathfrak{R}$ mit einer Basis von *„ausgezeichneten Umgebungen"*, die topologisch äquivalent zu Riemannschen Elementarumgebungen sind und der folgenden „Verträglichkeitsbedingung" genügen: Es seien $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ Punkte von $\mathfrak{R}$ mit ausgezeichneten Umgebungen $\mathfrak{U}(\mathfrak{P}_1)$ bzw. $\mathfrak{U}(\mathfrak{P}_2)$, die einen nichtleeren Durchschnitt $\mathfrak{S}$ haben. Ist dann für $\lambda = 1, 2$ T_λ die topologische Abbildung von $\mathfrak{U}(\mathfrak{P}_\lambda)$ auf die Riemannsche Elementarumgebung $\mathfrak{X}_\lambda$, so sei die topologische Abbildung $\mathfrak{T} = T_2 T_1^{-1}$ von $\mathfrak{S}_1 = T_1(\mathfrak{S})$ auf $\mathfrak{S}_2 = T_2(\mathfrak{S})$ analytisch; d.h. zu jedem Punkt $\mathfrak{Q}_1 \in \mathfrak{S}_1$ und zu dem Bildpunkte $\mathfrak{Q}_2 \in \mathfrak{S}_2$ gebe es Riemannsche Elementarumgebungen $\mathfrak{K}_1 < \mathfrak{S}_1$ bzw. $\mathfrak{K}_2 < \mathfrak{S}_2$, so daß die Abbildungen $\mathfrak{T}' = A_2 \mathfrak{T}$ bzw. $\mathfrak{T}'' = A_1 \mathfrak{T}^{-1}$ (A_λ Projektion von $\mathfrak{X}_\lambda$, $\lambda = 1, 2$) durch Funktionen, die in $\mathfrak{K}_1$ bzw. $\mathfrak{K}_2$ analytisch sind, gegeben werden ([2], S. 6).

2.2. Um eine kurze Ausdrucksweise zu haben, sei im folgenden der Buchstabe $\boldsymbol{\Sigma}$ Symbol für (höchstens) abzählbar unendliche, $\mathfrak{R}$ überdeckende Systeme von ausgezeichneten Umgebungen, wobei mit jedem Element $\mathfrak{U}$ eines Systems $\boldsymbol{\Sigma}$ eine topologische Abbildung T von $\mathfrak{U}$ auf eine Riemannsche Elementarumgebung $\mathfrak{X}$ fest verknüpft zu denken ist[3]).

a) Ist ein System $\boldsymbol{\Sigma}$ gegeben, so sei die Menge $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{R}$ *Primkeim* des Punktes $\mathfrak{P} \in \mathfrak{R}$, wenn aus $\mathfrak{U} \in \boldsymbol{\Sigma}$ und $\mathfrak{P} \in \mathfrak{U}$ folgt, daß eine Umgebung $\mathfrak{U}^* < \mathfrak{U}$ von $\mathfrak{P}$ existiert, so daß $T(\mathfrak{E} \cap \mathfrak{U}^*)$ Primkeim des Punktes $T(\mathfrak{P})$ in $T(\mathfrak{U}^*) < \mathfrak{X}$ ist.

b) Wir nennen eine Funktion $f(\mathfrak{P})$ des Punktes $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{R}$ *analytisch* (*meromorph*) in $\mathfrak{R}$, wenn ein System $\boldsymbol{\Sigma}$ existiert, so daß für alle $\mathfrak{U} \in \boldsymbol{\Sigma}$ die Funktion $f T^{-1}$ analytisch (meromorph) in $\mathfrak{X}$ ist.

[3]) Diese Bezeichnungen verwenden wir auch in den folgenden Definitionen.

c) Eine Menge $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{R}$ heiße *analytisch*, wenn es ein System $\mathbf{\Sigma}$ gibt, so daß für jedes $\mathfrak{U} \in \mathbf{\Sigma}$ die Menge $T(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{U})$ eine analytische Menge in $\mathfrak{X}$ ist.

d) Die Menge $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{R}$ sei *gewöhnlich*, wenn ein System $\mathbf{\Sigma}$ existiert, so daß aus $\mathfrak{U} \in \mathbf{\Sigma}$ folgt, daß $T(\mathfrak{U} \cap \mathfrak{M})$ gewöhnlich in $\mathfrak{X}$ ist.

e) Eine Teilmenge $\mathfrak{E}$ der Menge $\mathfrak{M} < \mathfrak{R}$ heiße Primkeim von $\mathfrak{M}$ im Punkte $\mathfrak{P}$, wenn $\mathfrak{E}$ Primkeim des Punktes $\mathfrak{P}$ ist und kein Primkeim $+\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{P}$ existiert, der $\mathfrak{E}$ enthält und in $\mathfrak{M}$ liegt. Eine Menge $\mathfrak{M} < \mathfrak{R}$ heiße *analytisch zusammenhängend*, wenn es zu beliebigen Primkeimen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}^*$ von $\mathfrak{M}$ eine endliche Kette von Primkeimen $\mathfrak{E}_1, \ldots, \mathfrak{E}_h$ von $\mathfrak{M}$ gibt, so daß $\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_h = \mathfrak{E}^*$ ist, und für $i = 1, \ldots, h-1$ $\mathfrak{E}_i$ und $\mathfrak{E}_{i+1}$ einen gemeinsamen Primkeim besitzen.

2.3. Nach diesen Definitionen erscheinen einige Begriffe des § 1 in neuem Licht; es gilt:

1. Ein regulär zusammenhängender Riemannscher Elementarbereich ist ein Riemannscher Bereich.

2. Ein regulär zusammenhängender kanonischer Keim ist analytisch zusammenhängend und umgekehrt.

2.4. Im Mittelpunkt der späteren Untersuchungen wird das Studium von Systemen meromorpher Funktionen stehen. Dabei bedienen wir uns der folgenden Terminologie:

Die Funktionen $f_1(\mathfrak{P}), \ldots, f_k(\mathfrak{P})$ seien meromorph (analytisch) im Riemannschen Gebiet $\mathfrak{R}$ bei der Zugrundelegung des gleichen Systems $\mathbf{\Sigma}$. Wir nennen die Abbildung $\mathbf{\Omega}_k$:

$$z_j = f_j(\mathfrak{P}), \qquad j = 1, \ldots, k, \tag{1}$$

von $\mathfrak{R}$ in den Raum der Funktionentheorie eine *meromorphe (analytische) Abbildung* von $\mathfrak{R}$. Da meromorphe Funktionen Unbestimmtheitspunkte haben, bedarf der Begriff des Bildpunktes bei einer meromorphen Abbildung der Erklärung. Es sei[3]: $\mathfrak{U} \in \mathbf{\Sigma}$, $\mathfrak{X} = T(\mathfrak{U})$ und in $\mathfrak{X}$:

$$z_j = f_j(\mathfrak{P}) = h_j(\mathfrak{P})/g_j(\mathfrak{P}), \qquad j = 1, \ldots, k, \tag{2}$$

mit $g_j(\mathfrak{P}) = g_j(A\,\mathfrak{P}) = g_j(x)$, vgl. 1.5. Setzen wir:

$$g(x) = \prod_{j=1}^{k} g_j(x), \tag{3}$$

so ist die Abbildung $\mathbf{\Omega}_k T^{-1}$ in allen Punkten $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{X}$ mit $g(A\,\mathfrak{P}) \neq 0$ analytisch und daher der Bildpunkt $\mathbf{\Omega}_k T^{-1}(\mathfrak{P})$ ein wohlbestimmter endlicher Punkt des z-Raumes. Bildpunkt eines beliebigen Punktes $\mathfrak{Q}$ von $\mathfrak{U}$ sei jeder Punkt ζ des Raumes der Funktionentheorie, für den eine Folge $\{\mathfrak{P}^{(\nu)}, z^{(\nu)} = \mathbf{\Omega}_k T^{-1}(\mathfrak{P}^{(\nu)})\}$ mit $g(\mathfrak{P}^{(\nu)}) \neq 0$, $\mathfrak{P}^{(\nu)} \in \mathfrak{X}$ existiert, deren Grenzpunkt $\{T(\mathfrak{Q}), \zeta\}$ ist. Wir nennen $\{\mathfrak{Q}, \zeta = \mathbf{\Omega}_k(\mathfrak{Q})\}$ Punktepaar von $\mathbf{\Omega}_k$. Die Punktepaare $\mathbf{\Omega}_k$ in $\{\mathfrak{U}, z\text{-Raum}\}$ genügen dem Gleichungssystem:

$$g_j\big(T(\mathfrak{Q})\big)\, z_j - h_j\big(T(\mathfrak{Q})\big) = 0, \qquad j = 1, \ldots, k, \tag{4}$$

das wir Gleichungssystem von $\mathbf{\Omega}_k$ für $\mathfrak{U} \in \mathbf{\Sigma}$ nennen.

2.5. Eine meromorphe Abbildung bildet im allgemeinen analytische Mengen des Riemannschen Bereiches $\mathfrak{R}$ auf Punkte ab. Diese Mengen hängen von Parametern, nämlich den Koordinaten des Bildpunktes ab. Die Untersuchung einer meromorphen Abbildung führt daher auf das Problem, die Abhängigkeit analytischer Mengen von Parametern zu studieren.

§ 3. Parameterabhängige analytische Mengen in Riemannschen Elementarbereichen.

3.1. Es sei $\mathfrak{X}$ ein Riemannscher Elementarbereich mit der Projektionsabbildung A und der Projektion X. Z sei ein einfach zusammenhängendes[4]) Gebiet des $\{z_1, \ldots, z_k\} = (z)_k = z$-Raumes. Das topologische Produkt $\tilde{\mathfrak{X}} = \{\mathfrak{X}, Z\}$ von $\mathfrak{X}$ und Z ist ein Riemannscher Elementarbereich, wenn als Projektionsabbildung $\tilde{A}$ diejenige Abbildung genommen wird, die auf $\mathfrak{X}$ mit A und auf Z mit der Identität übereintimmt; die Projektion von $\tilde{\mathfrak{X}}$ ist $\tilde{X} = \{X, Z\}$.

3.2. Wir betrachten analytische Mengen in $\tilde{\mathfrak{X}}$ und definieren: Der kanonische Keim $\tilde{\mathfrak{M}}$ in $\tilde{\mathfrak{X}}$ hänge „*parametrisch von z*" ab, wenn es eine nicht ausgeartete lineare Transformation:

$$(y)_n = L(x)_n, \tag{5}$$

ein Gebiet $Y^{(\varrho)}$ im $(y)_\varrho$-Raum ($\varrho \geqq 0$) und ein Gebiet Z des $(z)_k$-Raumes gibt, so daß $\tilde{\mathfrak{M}}$ ein Riemannscher Elementarbereich über $\tilde{Y}^{(\varrho)} = \{Y^{(\varrho)}, Z\}$ ist, wobei die zugehörige Keimprojektionsabbildung $\tilde{K}$:

$$\tilde{Y}^{(\varrho)} = \tilde{K}(\tilde{\mathfrak{M}}), \tag{6}$$

die z-Koordinaten der Punkte von $\tilde{\mathfrak{M}}$ ungeändert lasse. Diesen Sachverhalt fassen wir in die Formel

$$\tilde{\mathfrak{M}} = \tilde{\mathfrak{M}}(z), \qquad z \in Z, \tag{7}$$

zusammen.

3.3. Der Grund zur Einführung der parameterabhängigen kanonischen Keime liegt in ihren Eigenschaften bei Parameterspezialisierungen oder allgemeiner Substitutionen folgender Art: Die Funktionen:

$$z_i = \varphi_i(\zeta_1, \ldots, \zeta_l), \qquad i = 1, \ldots, k, \tag{8}$$

seien analytisch im Gebiet $\mathbf{Z}$[4]). Die Abbildung (8) — im folgenden kurz mit $z = \varphi(\zeta)$ bezeichnet — bilde $\mathbf{Z}$ in Z ab.

Der kanonische Keim $\tilde{\mathfrak{M}}(z)$, $z \in Z$, besitze die Verzweigungsprojektion

$$v\big((y)_\varrho, z\big) = 0. \tag{9}$$

[4]) Alle Gebiete des Parameterraumes, die bei den folgenden Untersuchungen vorkommen, werden einfach zusammenhängend vorausgesetzt, ohne daß dieses künftig noch hervorgehoben werde.

Nach dem Einsetzen von (8) in die Funktion v, verschwinde v nicht identisch. Dann ist die Menge $\mathfrak{N}'$ der Punkte $\{\mathfrak{P}, \zeta\}$, für die $\{\mathfrak{P}, z = \varphi(\zeta)\}$ in $\widetilde{\mathfrak{M}}$ liegt, ein kanonischer Keim, und es gilt:

$$\mathfrak{N}' = \mathfrak{N}'(\zeta), \quad \zeta \in \boldsymbol{Z}. \tag{10}$$

3.4. Kanonische Keime $\widetilde{\mathfrak{M}}(z)$ dienen als Bausteine für analytische Mengen, die von Parametern abhängen. Wichtig ist daher die Frage: Unter welchen Bedingungen bleibt der analytische Zusammenhang eines kanonischen Keimes bei einer Substitution (8) erhalten? Sucht man nur hinreichende Bedingungen, so genügt es, dieses Problem für die Parameterspezialisierung:

$$z = \bar{z} \in Z \tag{11}$$

zu studieren. Es sei[5]:

$$\mathfrak{M}(\bar{z}) = \widetilde{\mathfrak{M}} \cap \{\mathfrak{X}, \bar{z}\}, \qquad \dot{\mathfrak{M}}(\bar{z}) = \dot{\mathfrak{M}} \cap \{\mathfrak{X}, \bar{z}\},$$

und mit $Q = v(\widehat{\mathfrak{M}})$ sei $\overline{Q} = Q \cap \{Y^{(\varrho)}, \bar{z}\}$. Unsere Aufgabe kann nach 2.3 und 1.13 so formuliert werden: Suche hinreichende Bedingungen dafür, daß aus dem Zusammenhang (durch Kurven) von $\dot{\mathfrak{M}}$ der Zusammenhang von $\dot{\mathfrak{M}}(\bar{z})$ folgt. Wie gleich gezeigt werden soll, reicht die folgende *Deformationsbedingung* aus:

Jede Kurve in $\dot{Y}^{(\varrho)} = \widetilde{Y}^{(\varrho)} - Q$, deren Endpunkte zu $\{Y^{(\varrho)}, \bar{z}\}$ gehören, kann unter Festhaltung der Endpunkte in $\dot{Y}^{(\varrho)}$ auf eine Kurve deformiert werden, die in $\{Y^{(\varrho)} - \overline{Q}, \bar{z}\}$ liegt.

Sind nämlich $\widetilde{\mathfrak{P}}_1 = \{\mathfrak{P}_1, \bar{z}\}$ und $\widetilde{\mathfrak{P}}_2 = \{\mathfrak{P}_2, \bar{z}\}$ Punkte von $\dot{\mathfrak{M}}(\bar{z})$, so können wir diese Punkte wegen des vorausgesetzten Zusammenhanges von $\dot{\mathfrak{M}}$ in $\dot{\mathfrak{M}}$ durch eine Kurve $\boldsymbol{T}_0$ verbinden. Diese Kurve projiziert sich in $\dot{Y}^{(\varrho)}$ auf eine Kurve $\gamma_0 = \widetilde{K}(\boldsymbol{T}_0)$, deren Endpunkte zu $\{Y^{(\varrho)}, \bar{z}\}$ gehören.

Nach der Deformationsbedingung ist γ_0 in $\dot{Y}^{(\varrho)}$ unter Festhaltung der Endpunkte homotop zu einer Kurve γ_1, in $\{Y^{(\varrho)} - \overline{Q}, \bar{z}\}$. Diese Deformation drückt sich in $\dot{\mathfrak{M}}$ als Deformation von $\boldsymbol{T}_0$ auf eine Kurve $\boldsymbol{T}_1$ durch, die in $\dot{\mathfrak{M}}(\bar{z})$ liegt und $\widetilde{\mathfrak{P}}_1$ mit $\widetilde{\mathfrak{P}}_2$ verbindet, so daß in der Tat $\dot{\mathfrak{M}}(\bar{z})$ zusammenhängend ist.

3.5. Ausgedehnte Untersuchungen zur Diskussion der Deformationsbedingung werden in den Arbeiten [3] und [5] auf den Begriff der „*Schar von analytischen Mannigfaltigkeiten*" gegründet. Dieser für die Theorie der parametrischen Abhängigkeit grundlegende Begriff werde nun erklärt:

Die Funktion $v((y)_\varrho, z)$ mit der Nullstellenmenge Q sei im Gebiet $\widetilde{\mathfrak{Y}} = \{\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}\}$ analytisch. Wir unterscheiden die Fälle $\varrho = 0$, $\varrho = 1$ und $\varrho > 1$.

A. $\varrho = 0$. Es sei $Q \cap \mathfrak{Z}$ leer.

B. $\varrho = 1$. Es gebe einen Kreis $Y_1 \subset \mathfrak{Y}$ in der y_1-Ebene und ein Gebiet $Z \subset \mathfrak{Z}$ derart, daß die Punkte von $Q \cap \{Y_1, Z\}$ eine ganz algebroide Gleichung

[5]) Vgl. 1.13; $\dot{\mathfrak{M}}$ ist die zu $\widetilde{\mathfrak{M}}$ gehörige Mannigfaltigkeit.

$p(y_1/z)=0$ erfüllen; p Polynom von y_1 mit in Z analytischen Koeffizienten, höchster Koeffizient 1. Für $z\in Z$ besitze p im Innern von Y_1 lauter verschiedene Wurzeln und keine Wurzeln auf dem Rande von Y_1. Dann heiße Q Schar für $\{Y_1, Z\}$.

C. Scharen seien für Dimensionen des y-Raumes $\leq \varrho-1$ definiert. Es gebe Gebiete $Y\subset\mathfrak{Y}$ und $Z\subset\mathfrak{Z}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Eine nicht ausgeartete lineare Transformation:

$$(\eta)_\varrho = L(y)_\varrho \tag{12}$$

überführe Y in das Kreiszylindergebiet $\boldsymbol{H}=\{\boldsymbol{H}', \varkappa\}$, $\boldsymbol{H}'$ Kreiszylindergebiet im $(\eta)_{\varrho-1}$-Raum, $\varkappa$ Kreis in der η_ϱ-Ebene.

2. Es gebe im $(\eta)_{\varrho-1}$-Raum eine Schar q für $\{\boldsymbol{H}', Z\}$ derart, daß gilt:

a) Jeder Punkt von $Q\cdot\{Y, Z\}$ dessen Projektion in den $\{(\eta)_{\varrho-1}, z\}$-Raum nicht zu q gehört, genüge der Gleichung:

$$p(\eta_\varrho/(\eta)_{\varrho-1}, z)=0; \tag{13}$$

p Polynom von η_ϱ mit in $\{\boldsymbol{H}', Z\}$ analytischen Koeffizienten, höchster Koeffizient 1.

b) Wenn $\{(\eta)_{\varrho-1}, z\}\subseteq\{\boldsymbol{H}', Z\}-q$ ist, besitze p im Inneren von $\varkappa$ lauter verschiedene Wurzeln und keine Wurzeln auf dem Rande von $\varkappa$.

Unter den angegebenen Voraussetzungen sei Q eine (lokale) *Schar* für $\{Y, Z\}$.

D. Diese Definition läßt sich auf allgemeinere Teilgebiete G von $\mathfrak{Y}$ ausdehnen: Q heiße Schar für $\{G, Z\}$, wenn jeder Punkt $(\bar{y})_\varrho$ von G eine Umgebung $U(\bar{y})_\varrho$ besitzt, so daß Q (lokale) Schar für $\{U(\bar{y})_\varrho, Z\}$ ist.

3.6. Die Bedeutung des Begriffes der Schar beruht a) auf der Invarianz bei Substitutionen (8), b) auf der Beziehung zur Deformationsbedingung, c) auf der Verbindung mit speziellen Eliminationsproblemen, auf welche die Frage nach dem Vorhandensein der Schareigenschaft führt.

Zu a). Es sei Q Schar für $\{G, Z\}$. Die analytische Abbildung (8) bilde $\mathbf{Z}$ in Z ab. Q' sei die Nullstellenmenge der Funktion $v'((y)_\varrho, \zeta)=v((y)_\varrho, \varphi(\zeta))$. Dann ist Q' Schar für $\{G, \mathbf{Z}\}$.

Zu b). Wenn Q eine Schar für $\{Y^{(\varrho)}, Z\}$ ist, gilt die Deformationsbedingung für alle $\bar{z}\in Z$.

Der Beweis von a) folgt aus der Definition der Schar; b) ist ein Hauptergebnis der Arbeiten [3] (vgl. S. 152) und [5] (vgl. S. 13).

Für eine Zusammenfassung der Ergebnisse a), b) und 3.4 benutzen wir folgende Bezeichnung: Der kanonische Keim $\widetilde{\mathfrak{M}}(z)$ heiße *ausgezeichnet*, wenn seine Verzweigungsprojektion $v(\widetilde{\mathfrak{M}})$ eine Schar für $\{Y^{(\varrho)}, Z\}$ ist. Wir haben somit den Satz:

Ein ausgezeichneter, analytisch zusammenhängender, kanonischer Keim geht durch die Substitution (8) *in einen ausgezeichneten, analytisch zusammenhängenden, kanonischen Keim über.*

Zu c). Es handelt sich um solche Eliminationsprobleme, bei denen ein Teil der Variablen als „Parameter" ausgezeichnet ist. Ohne auf Einzelheiten einzugehen, soll das Grundprinzip derartiger Untersuchungen angegeben werden.

3.7. Es sei $f(x, z)$ eine im Punkte $\{\mathfrak{D}, z_0\}$ analytische Funktion der n Variablen $(x)_n$ und der k Parameter $(z)_k$. Dann lautet das *„Prinzip der Parameterspezialisierung"*:

a) In jeder beliebigen Umgebung von z^0 gibt es einen Punkt $\bar{z}$, so daß $f(x, \bar{z}) \not\equiv 0$ ist.

b) Die Anzahl der Parameter sei $k = 1$. Es gibt eine Potenz $(z - z^0)^\alpha$, $\alpha \geqq 0$ ganz, so daß $f(x, z) = (z - z^0)^\alpha \cdot f_1(x, z)$ mit analytischem $f_1(x, z)$ und $f_1(x, z_0) \not\equiv 0$ ist.

3.8. Bekanntlich beruhen alle Eliminationen in der Funktionentheorie von mehreren Veränderlichen auf dem Weierstraßschen Vorbereitungssatz. Interessieren wir uns für die Abhängigkeit der Nullstellenmenge $\tilde{\mathfrak{M}}$ von $f(x, z)$ von den Parametern z, so müssen wir diesen Satz möglichst so anwenden, daß die lineare Variablentransformation die Sonderrolle, die wir den z zugedacht haben, nicht zerstört, d.h. sie darf nur die Variablen x und nicht die Parameter z betreffen. Im Punkte $\{\mathfrak{D}, z^0\}$ ist die Bedingung hierfür: $f(x, z^0) \not\equiv 0$. Unter dieser Voraussetzung existiert nämlich eine lineare Transformation (5), so daß bei Auszeichnung von y_n:

$$f(x, z) = f(y, z) = p\left(y_n / (y)_{n-1}, z\right) \cdot e(y, z), \tag{14}$$

p ausgezeichnetes Pseudopolynom von y_n mit der Spitze im Punkte $\{\mathfrak{D}, z^0\}$, $e(\mathfrak{D}, z^0) \neq 0$. Da $\tilde{\mathfrak{M}}$ in der Umgebung von $\{\mathfrak{D}, z^0\}$ durch die ganz algebroide Gleichung $p = 0$ bestimmt wird, ist $\tilde{\mathfrak{M}}$ ein Riemannscher Elementarbereich über dem topologischen Produkt einer Umgebung des Nullpunktes im $(y)_{n-1}$-Raum und einer Umgebung von z^0; d.h. $\tilde{\mathfrak{M}}$ hängt in der Umgebung von $\{\mathfrak{D}, z^0\}$ parametrisch von z ab.

3.9. Wenn $f(x, z^0) \equiv 0$ ist, führt das Prinzip der Parameterspezialisierung (3.7) zu den beiden folgenden Aussagen:

a) *Es gibt in beliebiger Umgebung von z^0 einen Punkt $\bar{z}$ und dazu Umgebungen $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{D}$ und $Z(\bar{z})$ von $\bar{z}$, so daß:*

$$(\tilde{\mathfrak{M}}) = \tilde{\mathfrak{M}} \cap \{\mathfrak{G}, Z(\bar{z})\}$$

aus parametrisch von z abhängigen, kanonischen Keimen besteht.

b) *Im Falle $k = 1$ gibt es Umgebungen $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{D}$ und $Z(z^0)$ von z^0, so daß*

$$(\tilde{\mathfrak{M}}) = \tilde{\mathfrak{M}} \cap \{\mathfrak{G}, Z(z^0)\} = \tilde{\mathfrak{M}}_1 \cup \tilde{\mathfrak{M}}_2$$

ist, wobei $\tilde{\mathfrak{M}}_1$ aus parametrisch von z abhängigen kanonischen Keimen besteht, während $\tilde{\mathfrak{M}}_2$ nur Punkte enthält, in denen $z \equiv z_0$ ist.

Dieses Ergebnis gilt wörtlich für die Nullstellenmenge $\widetilde{\mathfrak{M}}$ eines Systems von Gleichungen:

$$f_\lambda(\mathfrak{P}, z) = 0, \qquad \lambda = 1, \ldots, l, \qquad \{\mathfrak{P}, z\} \in \widetilde{\mathfrak{X}}; \tag{15}$$

f_λ analytisch in $\widetilde{\mathfrak{X}}$, vorausgesetzt, daß $\widetilde{\mathfrak{M}}$ gewöhnlich ist.

Der Beweis geschieht durch vollständige Induktion nach der Anzahl der Gln. (15) (vgl. [1], S. 132 und 1.11), wobei bei jedem Eliminationsschritt das Prinzip der Parameterspezialisierung benutzt wird.

Unsere „lokalen" Eliminationsaussagen können in folgender Weise erweitert werden:

Es sei $\mathfrak{B}$ ein Kompaktum in $\mathfrak{X}$. Dann gibt es ein Gebiet $\mathfrak{G}$ mit:

$$\mathfrak{B} < \mathfrak{G} < \mathfrak{X},$$

so daß a) und b) bei dieser Bedeutung von $\mathfrak{G}$ richtig bleiben.

3.10. Wie in den Arbeiten [3], S. 154 und [5], S. 9 gezeigt wird, führt die Diskussion der Scharbedingung für $v(\widetilde{\mathfrak{M}})$ in $\{Y^{(\varrho)}, Z\}$ auf ein analytisches Gleichungssystem in den Variablen $\{(y)_\varrho, z\}$. Wie in 3.9 folgt:

Gegeben sei ein kanonischer Keim, $\widetilde{\mathfrak{M}} = \widetilde{\mathfrak{M}}(z)$, $z \in Z$, mit der Keimprojektionsabbildung $\widetilde{K}$ und der Keimprojektion $\{Y^{(\varrho)}, Z\} = \widetilde{K}(\widetilde{\mathfrak{M}})$. Es sei B ein Kompaktum in $Y^{(\varrho)}$.

a) *Es sei z^0 ein Punkt in Z und $Z(z^0)$ eine Umgebung von z^0 in Z. Dann gibt es einen Punkt $\bar{z}$ in $Z(z^0)$ mit einer Umgebung $Z(\bar{z})$ und dazu ein Gebiet G mit:*

$$B < G < Y^{(\varrho)}, \tag{16}$$

so daß die Menge $\widetilde{\mathfrak{M}}_1 = \widetilde{K}^{-1}(\{G, Z(\bar{z})\})$ ein ausgezeichneter kanonischer Keim ist.

b) *Die Anzahl der Parameter sei $k = 1$. Zu jedem Punkte z^0 von Z gibt es eine Umgebung $Z(z^0)$ und dazu ein Gebiet G mit der Eigenschaft* (16), *derart, daß jeder Punkt $\bar{z}$ von $Z(z^0)$ — mit eventueller Ausnahme von z^0 — eine Umgebung $Z(\bar{z})$ besitzt, so daß $\widetilde{\mathfrak{M}}_1$ ein ausgezeichneter kanonischer Keim ist.*

3.11. Die soeben erklärten kanonischen Keime sind die Bausteine zum Aufbau parameterabhängiger analytischer Mengen in Riemannschen Bereichen, den wir im nächsten Paragraphen ausführen werden.

§ 4. Kanonische Mengen in Riemannschen Bereichen.

4.1. Es sei $\mathfrak{R}$ ein Riemannscher Bereich und Z ein (endliches) Gebiet des $(z)_k$-Raumes[4]). $\widetilde{\mathfrak{R}} = \{\mathfrak{R}, Z\}$ wird ein Riemannscher Bereich durch die folgende Einführung von ausgezeichneten Umgebungen: Es sei z^0 ein Punkt von Z und $Z(z^0)$ eine Kreiszylinderumgebung von z^0 in Z. Ist[3]) $\mathfrak{U}$ eine ausgezeichnete Umgebung von $\mathfrak{R}$ und T die topologische Abbildung von $\mathfrak{U}$ auf die Riemannsche Elementarumgebung $\mathfrak{X}$, so sei $\widetilde{\mathfrak{U}} = \{\mathfrak{U}, Z(z^0)\}$ eine ausgezeichnete Umgebung von $\widetilde{\mathfrak{R}}$. Bezeichnet $\widetilde{T}$ diejenige topologische Abbildung, die auf $\widetilde{\mathfrak{U}}$ mit T und auf Z mit der Identität übereinstimmt, so ist $\widetilde{\mathfrak{X}} = \{\mathfrak{X}, Z(z^0)\} = \widetilde{T}(\widetilde{\mathfrak{U}})$ wie in 3.1 eine Riemannsche Elementarumgebung.

4.2. Die folgende Definition erklärt, wie kanonische Keime zu parametrisch von z abhängigen Mengen vereinigt werden (vgl. [5], S. 20).

Im Riemannschen Bereich $\tilde{\mathfrak{R}}$ sei eine Menge $\tilde{\mathfrak{M}}$ gegeben, die bezüglich des Systems $\mathbf{\Sigma}$ von ausgezeichneten Umgebungen[6]) gewöhnlich sei. Es sei $\mathfrak{Z}$ Teilgebiet von Z[4]). Es gebe (höchstens) abzählbar unendlich viele Gebiete $\mathfrak{R}_\mu$ in $\mathfrak{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

A. $$\mathfrak{R} = \bigcup_\mu \mathfrak{R}_\mu .$$

B. Für alle μ liege die abgeschlossene Hülle von $\mathfrak{R}_\mu$ in einer ausgezeichneten Umgebung $\mathfrak{U}_\mu \in \mathbf{\Sigma}$. Ist T_μ die $\mathfrak{U}_\mu$ zugeordnete topologische Abbildung[6]), so sei:

$$R_\mu = T_\mu(\mathfrak{R}_\mu),$$
$$\tilde{M}_\mu = \tilde{T}_\mu(\tilde{\mathfrak{M}} \frown \{\mathfrak{U}_\mu, \mathfrak{Z}\}).$$

C. Es gebe endlich viele, regulär zusammenhängende, kanonische Keime:

$$\tilde{M}_{\mu i} = \tilde{M}_{\mu i}(z), \qquad z \in \mathfrak{Z}, \qquad i = 1, \ldots, N_\mu \geqq 0,$$

so daß gilt:

a) (17) $$\{R_\mu, \mathfrak{Z}\} \frown \tilde{M}_\mu \subset \bigcup_{i=1}^{N_\mu} \tilde{M}_{\mu i} \subset \tilde{M}_\mu ;$$

b) wenn die Keimprojektionsabbildung von $\tilde{M}_{\mu i}$ den Keim $\tilde{M}_{\mu i}$ in $\{Y_1, \mathfrak{Z}\}$[7]) und $\tilde{M}_{\mu i} \frown \{R_\mu, \mathfrak{Z}\}$ in $\{Y_2, \mathfrak{Z}\}$[7]) überführt, so sei die abgeschlossene Hülle $\overline{Y}_2$ von Y_2 in Y_1 enthalten[8]). Wir nennen:

$$\tilde{\mathfrak{M}}_{\mu i} = \tilde{T}_\mu^{-1}(\tilde{M}_{\mu i})$$

kanonischen Keim von $\tilde{\mathfrak{M}}$. Wegen (17) ist:

(18) $$\{\mathfrak{R}_\mu, \mathfrak{Z}\} \frown \tilde{\mathfrak{M}} \subset \bigcup_{i=1}^{N_\mu} \tilde{\mathfrak{M}}_{\mu i} \subset \tilde{\mathfrak{M}}.$$

D. Die kanonischen Keime $\tilde{\mathfrak{M}}_{\mu i}$ seien im folgenden Sinne isoliert: Für keinen Wert von i gebe es einen Wert $j \neq i$ und dazu einen Punkt $\mathfrak{Q} \in \tilde{\mathfrak{M}}_{\mu i} \frown \tilde{\mathfrak{M}}_{\mu j}$, so daß $\tilde{\mathfrak{M}}_{\mu i}$ in $\mathfrak{Q}$ einen Primkeim hat, der auf $\tilde{\mathfrak{M}}_{\mu j}$ liegt.

Unter den Voraussetzungen A, B, C, D nennen wir $\tilde{\mathfrak{M}}$ eine *kanonische Menge* in $\{\mathfrak{R}, \mathfrak{Z}\}$.

E. Die kanonische Menge $\tilde{\mathfrak{M}}$ heiße ausgezeichnet, wenn jeder kanonische Keim $\tilde{M}_{\mu i}$ ausgezeichnet ist.

4.3. Da die Keime $\tilde{\mathfrak{M}}_{\mu i}$ nach 2.3 analytisch zusammenhängend sind, ist jede analytische Komponente von $\tilde{\mathfrak{M}}$ Vereinigungsmenge von solchen Keimen,

---

[6]) Vgl. 2.2.

[7]) Die an sich notwendigen Indizes μ und i sind hier weggelassen.

[8]) Diese Bedingung wird später bei der Anwendung des Satzes 3.10 (mit $B = \overline{Y}_2$) gebraucht.

und zwar gehören $\widetilde{\mathfrak{M}}_{\mu i}$ und $\widetilde{\mathfrak{M}}_{\nu j}$ zu der gleichen Komponente, wenn sie einen gemeinsamen Primkeim in einem Punkte von $\{\mathfrak{R}_\mu \cap \mathfrak{R}_\nu, \mathfrak{Z}\}$ haben (vgl. [5], S. 24). Daraus folgt:

Mit $\widetilde{\mathfrak{M}}$ ist auch jede analytische Komponente von $\widetilde{\mathfrak{M}}$ eine kanonische Menge in $\{\mathfrak{R}, \mathfrak{Z}\}$.

4.4. Wir wenden uns zu Sätzen über Substitution in kanonische Mengen; zunächst ein wichtiger Spezialfall, der unmittelbar aus Definition 4.2 folgt: *$\widetilde{\mathfrak{M}}$ sei eine kanonische Menge in $\{\mathfrak{R}, \mathfrak{Z}\}$ und $\mathfrak{Z}_1$ Teilgebiet von $\mathfrak{Z}$. Dann ist $\widetilde{\mathfrak{M}} \cap \{\mathfrak{R}, \mathfrak{Z}_1\}$ eine kanonische Menge in $\{\mathfrak{R}, \mathfrak{Z}_1\}$.*

4.5. Nun betrachten wir den allgemeinen Fall der analytischen Substitution (8). Ist $\widetilde{\mathfrak{M}}(z)$ eine *ausgezeichnete* kanonische Menge in $\{\mathfrak{R}, \mathfrak{Z}\}$, so transformiert (8) nach 3.6 jeden Keim $\widetilde{\mathfrak{M}}_{\mu i}(z)$ in einen analytisch zusammenhängenden kanonischen Keim $\mathfrak{N}'_{\mu i}(\zeta), \zeta \in \mathbf{Z}$. Es entsteht die Frage, ob sich diese Keime zu kanonischen Mengen in $\{\mathfrak{R}, \mathbf{Z}\}$ zusammenschließen, und, wenn ja, wie diese kanonischen Mengen mit den analytischen Komponenten von $\widetilde{\mathfrak{M}}(z)$ zusammenhängen. Diese Frage können wir unter zwei zusätzlichen Voraussetzungen über $\widetilde{\mathfrak{M}}$ beantworten. Der ersten Voraussetzung liegt folgender Gedanke zugrunde. Aus der Sachlage, daß $\widetilde{\mathfrak{M}}_{\mu i}(z)$ und $\widetilde{\mathfrak{M}}_{\nu j}(z)$ zur gleichen Komponente von $\widetilde{\mathfrak{M}}$ gehören, möchten wir auf dieselbe Eigenschaft für ihre Transformierten $\mathfrak{N}'_{\mu i}(\zeta)$ und $\mathfrak{N}'_{\nu j}(\zeta)$ schließen. Nach 4.3 würde das bedeuten: Wenn $\widetilde{\mathfrak{M}}_{\mu i}(z)$ und $\widetilde{\mathfrak{M}}_{\nu j}(z)$ in einem Punkte von $\{\mathfrak{R}_\mu \cap \mathfrak{R}_\nu, \mathfrak{Z}\}$ einen Primkeim gemeinsam haben, so auch $\mathfrak{N}'_{\mu i}(\zeta)$ und $\mathfrak{N}'_{\nu j}(\zeta)$ in einem Punkte von $\{\mathfrak{R}_\mu \cap \mathfrak{R}_\nu, \mathbf{Z}\}$. Wie man sofort sieht, folgt dies für beliebige Substitutionen (8) aus der folgenden Eigenschaft von $\widetilde{\mathfrak{M}}$:

I. *Wenn $\widetilde{\mathfrak{M}}_{\mu i}(z)$ und $\widetilde{\mathfrak{M}}_{\nu j}(z)$ in einem Punkte von $\{\mathfrak{R}_\mu \cap \mathfrak{R}_\nu, \mathfrak{Z}\}$ einen gemeinsamen Primkeim haben, so gibt es für jedes $z' \in \mathfrak{Z}$ einen Punkt $\{\mathfrak{D}', z'\}$ mit $\mathfrak{D}' \in \mathfrak{R}_\mu \cap \mathfrak{R}_\nu$, in dem sie einen Primkeim gemeinsam haben.* Wenn diese Eigenschaft für alle Werte von μ, ν, i und j vorhanden ist, werde die Überdeckung $(\mathfrak{R}_\mu)$ von $\mathfrak{R}$[9]) *„normiert“ (bezüglich $\mathfrak{Z}$)*[10]) genannt (vgl. [5], S. 21).

Die zweite Voraussetzung findet ihre Erklärung gerade in dem umgekehrten Schluß: Wenn $\mathfrak{N}'_{\mu i}(\zeta)$ und $\mathfrak{N}'_{\nu j}(\zeta)$ einen gemeinsamen Primkeim in einem Punkte von $\{\mathfrak{R}_\mu \cap \mathfrak{R}_\nu, \mathbf{Z}\}$ haben, so auch $\widetilde{\mathfrak{M}}_{\mu i}(z)$ und $\widetilde{\mathfrak{M}}_{\nu j}(z)$ in einem Punkte von $\{\mathfrak{R}_\mu \cap \mathfrak{R}_\nu, \mathfrak{Z}\}$. Es reicht für beliebige Substitutionen (8) hin, wenn diese Bedingung für die Spezialisierungen (11) gefordert wird. Mit Rücksicht auf (18) ergibt sich folgende Voraussetzung, die für alle μ, i und j und alle $\bar{z}$ aus $\mathfrak{Z}$ gestellt werde, vgl. [5], S. 21.

II. *$\widetilde{\mathfrak{M}}_{\mu i}(\bar{z})$ sei eine gewöhnliche Menge in $\{\mathfrak{U}_\mu, \bar{z}\}$ und besitze in keinem Punkte von $\{\mathfrak{R}_\mu, \bar{z}\}$ einen Primkeim auf $\widetilde{\mathfrak{M}}_{\mu j}(\bar{z})$, $j \neq i$.*

Unter dieser Voraussetzung heiße $\widetilde{\mathfrak{M}}$ *„allgemein gelegen (für $z \in \mathfrak{Z}$)“*[10]).

[9]) Vgl. 4.2. (A).

[10]) Den eingeklammerten Zusatz lassen wir gelegentlich weg.

4.6. Wie unsere Überlegungen gezeigt haben, sind drei Eigenschaften bei Spezialisierungsaussagen über $\widetilde{\mathfrak{M}}(z)$ wichtig, nämlich:

α) $\widetilde{\mathfrak{M}}(z)$ ist ausgezeichnet.

β) Die in die Definition von $\widetilde{\mathfrak{M}}(z)$ eingehende Überdeckung von $\mathfrak{R}$ ist normiert.

γ) $\widetilde{\mathfrak{M}}(z)$ ist allgemein gelegen.

Mit diesen Bezeichnungen lautet der angekündigte Spezialisierungssatz (vgl. [5], S. 25):

Es sei $\widetilde{\mathfrak{M}} = \widetilde{\mathfrak{M}}(z)$ eine kanonische Menge in $\{\mathfrak{R}, \mathfrak{Z}\}$ mit den Eigenschaften $\alpha), \beta), \gamma)$. Die analytischen Komponenten von $\widetilde{\mathfrak{M}}$ seien $\widetilde{\mathfrak{M}}^{\alpha}$; sie sind kanonische Mengen in $\{\mathfrak{R}, \mathfrak{Z}\}$ mit den Eigenschaften $\alpha), \beta), \gamma)$. Durch die Substitution (8) *entsteht aus $\widetilde{\mathfrak{M}}$ eine kanonische Menge $\mathfrak{N}'(\zeta)$ in $\{\mathfrak{R}, \mathbf{Z}\}$ mit den Eigenschaften $\alpha), \beta), \gamma)$. Die analytischen Komponenten von $\mathfrak{N}'(\zeta)$ seien $\mathfrak{N}'^{\alpha}(\zeta)$. Die Substitution* (8) *stellt eine eineindeutige Beziehung zwischen den Komponenten von $\widetilde{\mathfrak{M}}(z)$ und $\mathfrak{N}'(\zeta)$ her, indem sie bei richtiger Verteilung der Indizes $\widetilde{\mathfrak{M}}^{\alpha}(z)$ in $\mathfrak{N}'^{\alpha}(\zeta)$ überführt.*

4.7. Die Wichtigkeit des Spezialisierungssatzes erfordert eine Diskussion der Bedingungen $\alpha)$, $\beta)$, $\gamma)$, die für den Fall einer endlichen Überdeckung $(\mathfrak{R}_{\mu})$ [9] nun durchgeführt werde.

Über $\alpha)$ ist das Wichtigste schon in 3.10 gesagt worden. Die Voraussetzungen $\beta)$ und $\gamma)$ bedeuten verschiedenartige Einschränkungen für kanonische Mengen. Die Normiertheitsforderung $\beta)$ kann bei hinreichend kleinem Parametergebiet durch geeignete Abänderung der Überdeckung $(\mathfrak{R}_{\mu})$ immer erreicht werden.

Der Riemannsche Bereich $\mathfrak{R}$ sei kompakt.

Es sei $\widetilde{\mathfrak{M}}$ eine kanonische Menge in $\{\mathfrak{R}, \mathfrak{Z}\}$ bei endlicher Überdeckung $(\mathfrak{R}_{\mu})$ [9]. Es sei $\overline{z}$ ein beliebiger Punkt aus $\mathfrak{Z}$. Dann gibt es eine Umgebung $\mathfrak{Z}(\overline{z})$ von $\overline{z}$ und eine Überdeckung von $\mathfrak{R}$:

$$\mathfrak{R} = \bigcup_{\mu} \underline{\mathfrak{R}}_{\mu} \tag{19}$$

mit

$$\underline{\mathfrak{R}}_{\mu} < \mathfrak{R}_{\mu}, \tag{20}$$

derart, daß die Überdeckung (19) *normiert bezüglich $\mathfrak{Z}(\overline{z})$ ist.*

Beweisskizze (vgl. [5], S. 27). Eine Abänderung von $\mathfrak{R}_{\mu}$ wird nötig, wenn ein Index $\nu \neq \mu$ existiert, so daß es kanonische Keime $\widetilde{\mathfrak{M}}_{\mu i}$ und $\widetilde{\mathfrak{M}}_{\nu j}$ gibt, die nur in Randpunkten von $\{\mathfrak{R}_{\mu} \cap \mathfrak{R}_{\nu}, \overline{z}\}$ gemeinsame Primkeime haben. Man ersetze dann $\mathfrak{R}_{\mu}$ und $\mathfrak{R}_{\nu}$ unter Wahrung von (19) durch Teilgebiete $\underline{\mathfrak{R}}_{\mu}$ bzw. $\underline{\mathfrak{R}}_{\nu}$, so daß $\widetilde{\mathfrak{M}}_{\mu i}$ und $\widetilde{\mathfrak{M}}_{\nu j}$ in keinem Punkte der abgeschlossenen Hülle von $\{\underline{\mathfrak{R}}_{\mu} \cap \underline{\mathfrak{R}}_{\nu}, \overline{z}\}$ einen gemeinsamen Primkeim besitzen. Da nach Voraussetzung die Überdeckung $(\mathfrak{R}_{\mu})$ endlich ist, genügen endlich viele Abänderungen, um die Eigenschaft der Normiertheit bezüglich einer hinreichend kleinen Umgebung von $\overline{z}$ herzustellen.

4.8. Die Forderung γ) ist die Bedingung der allgemeinen Lage. Sehen wir von den speziellen Gegebenheiten ab, so bleibt folgendes Problem übrig: Im Riemannschen Elementarbereich $\tilde{\mathfrak{X}} = \{\mathfrak{X}, \mathfrak{Z}\}$ seien $\tilde{\mathfrak{M}}(z)$ und $\tilde{\mathfrak{N}}(z)$ kanonische Keime. Für alle $\bar{z} \in \mathfrak{Z}$ seien $\tilde{\mathfrak{M}}(\bar{z}) = \tilde{\mathfrak{M}}(z) \cap \{\mathfrak{X}, \bar{z}\}$ und $\tilde{\mathfrak{N}}(\bar{z}) = \tilde{\mathfrak{N}}(z) \cap \{\mathfrak{X}, \bar{z}\}$ gewöhnlich in $\{\mathfrak{X}, \bar{z}\}$. In keinem Punkte von $\tilde{\mathfrak{X}}$ habe $\tilde{\mathfrak{M}}$ einen Primkeim auf $\tilde{\mathfrak{N}}$. Unter welchen Bedingungen bleibt die letzte Eigenschaft bei Parameterspezialisierung (11) erhalten, d.h. gilt sie auch für $\tilde{\mathfrak{M}}(\bar{z})$ und $\tilde{\mathfrak{N}}(\bar{z})$? Diese Aufgabe läßt sich in der Umgebung jedes Punktes $\tilde{\mathfrak{P}}_0 = \{\mathfrak{P}_0, z^0\}$ von $\tilde{\mathfrak{X}}$ darauf zurückführen, daß eine in $\tilde{P}_0 = \tilde{A}(\tilde{\mathfrak{P}}_0)$ analytische Funktion der Variablen $\{x, z\}$ nicht identisch in x verschwindet, wenn z spezialisiert wird. Diese Tatsache ist gleichbedeutend mit dem Nichtverschwinden einer in z^0 analytischen Funktion von z. Man kommt daher zu folgender Aussage und beachte ihren Unterschied zu 3.10 (vgl. [5], S. 15):

Es sei $\mathfrak{B}$ ein Kompaktum in $\mathfrak{X}$ und z^0 ein Punkt von $\mathfrak{Z}$. Dann gibt es eine Umgebung $Z(z^0)$ von z_0 und ein Gebiet $\mathfrak{G}$ mit

$$\mathfrak{B} < \mathfrak{G} < \mathfrak{X},$$

ferner eine in $Z(z^0)$ analytische Funktion $g(z)$ mit folgender Eigenschaft: Ist $\bar{z} \in Z(z^0)$ und $g(\bar{z}) \neq 0$, so besitzt $\tilde{\mathfrak{M}} \cap \{\mathfrak{G}, \bar{z}\}$ keinen Primkeim auf $\tilde{\mathfrak{N}} \cap \{\mathfrak{G}, \bar{z}\}$.

4.9. Wir haben jetzt alle Einzelresultate beisammen, um den grundlegenden Satz über das Bestehen von α), β), γ) beweisen zu können.

Der Riemannsche Bereich $\mathfrak{R}$ sei kompakt.

Es sei $\tilde{\mathfrak{M}} = \tilde{\mathfrak{M}}(z)$ eine kanonische Menge in $\{\mathfrak{R}, Z\}$ bei endlicher Überdeckung $(\mathfrak{R}_\mu)$[9]*.*

a) *Der Punkt ζ in Z und die Umgebung $Z(\zeta) < Z$ von ζ seien beliebig vorgegeben. Dann gibt es einen Punkt $\bar{z}$ in $Z(\zeta)$ mit einer Umgebung $\mathfrak{Z}(\bar{z}) < Z(\zeta)$, so daß die kanonische Menge:*

$$(\tilde{\mathfrak{M}}) = \tilde{\mathfrak{M}} \cap \{\mathfrak{R}, \mathfrak{Z}(\bar{z})\}$$

die Eigenschaften α), β), γ) hat.

b) *Die Anzahl der Parameter sei $k = 1$. Zu jedem Punkt $z^0 \in Z$ gibt es eine Umgebung $\mathfrak{Z}(z^0)$, derart, daß jeder Punkt $\bar{z}$ von $\mathfrak{Z}(z^0)$ — mit eventueller Ausnahme von z^0 — eine Umgebung $\mathfrak{Z}(\bar{z})$ hat, so daß $(\tilde{\mathfrak{M}})$ die Eigenschaften α), β), γ) besitzt.*

Beweisskizze (vgl. [5], S. 30). Wegen 4.4 ist $(\tilde{\mathfrak{M}})$ eine kanonische Menge. Um die Eigenschaft α) zu gewinnen, wende man 3.10 auf die kanonischen Keime $\tilde{M}_{\mu i}$ mit $B = \overline{Y}_2$ an, vgl. Definition 4.2 (C), Eigenschaft b). Die Eigenschaft β) folgt aus 4.7. Die Eigenschaft γ) ergibt sich aus 4.8, wenn für $\tilde{\mathfrak{M}}$ und $\tilde{\mathfrak{N}}$ Paare von kanonischen Keimen $\tilde{M}_{\mu 1}$, $\tilde{M}_{\mu j}$ und für $\mathfrak{B}$ die abgeschlossene Hülle von R_μ gewählt werden, vgl. Definition 4.2 (D).

§ 5. Fasermengen meromorpher Abbildungen.

5.1. Nach den allgemeinen Untersuchungen über analytische Mengen mit Parametern in Riemannschen Bereichen beschäftigen wir uns nun speziell mit den Urbildmengen meromorpher Abbildungen; diese vereinigen sich unter bestimmten Bedingungen zu Fasermengen mit folgender Definition (vgl. [5], S. 37, und beachte die Unterschiede):

Es sei $\mathfrak{R}$ ein Riemannscher Bereich. $\boldsymbol{\Omega}_k$ sei eine meromorphe Abbildung von $\mathfrak{R}$ (vgl. 2.4). Es sei Z ein Gebiet des $(z)_k$-Raumes[4]).

A. Es gebe auf $\widetilde{\mathfrak{R}} = \{\mathfrak{R}, Z\}$ eine kanonische Menge $\widetilde{\mathfrak{M}} = \widetilde{\mathfrak{M}}(z)$, $z \in Z$, mit folgenden Eigenschaften:

a) Ist $\widetilde{\mathfrak{P}} = \{\mathfrak{P}, \bar{z}\} \in \widetilde{\mathfrak{R}}$ und $\bar{z} = \boldsymbol{\Omega}_k(\mathfrak{P})$, so sei $\widetilde{\mathfrak{P}} \in \widetilde{\mathfrak{M}}$.

b) Ist $\widetilde{\mathfrak{P}} = \{\mathfrak{P}, \bar{z}\} \in \widetilde{\mathfrak{M}}$, so sei $\bar{z} = \boldsymbol{\Omega}_k(\mathfrak{P})$.

Dann heiße $\widetilde{\mathfrak{M}}$ *kanonische Menge von* $\boldsymbol{\Omega}_k$ für das Gebiet Z.

Jede analytische Komponente von $\widetilde{\mathfrak{M}}$ werde *Fasermenge des Gebietes* Z genannt.

B. Ein Punkt z^* sei unter den folgenden Voraussetzungen *regulär* für $\boldsymbol{\Omega}_k$:

a) Es gebe eine Umgebung $\mathfrak{Z}(z^*)$ mit kanonischer Menge $\widetilde{\mathfrak{M}}$ für $\boldsymbol{\Omega}_k$.

b) $\widetilde{\mathfrak{M}}$ habe die Eigenschaften $\alpha)$, $\beta)$, $\gamma)$ (vgl. 4.6).

Jede Fasermenge von $\mathfrak{Z}(z^*)$ heiße *Fasermenge des regulären Punktes* z^*.

5.2. Die kanonische Menge der meromorphen Abbildung $\boldsymbol{\Omega}_k$ für ein Gebiet Z ist in der Umgebung jedes Punktes von $\widetilde{\mathfrak{R}}$ Lösungsmenge des zugehörigen Gleichungssystems von $\boldsymbol{\Omega}_k$ (vgl. 2.4). Für die Existenz einer derartigen Menge ist entscheidend, daß es auf $\widetilde{\mathfrak{R}}$ einen Primkeim gibt, der *parametrisch von* z *abhängt* und alle Punktepaare $\{\mathfrak{P}, z = \boldsymbol{\Omega}_k(\mathfrak{P})\}$ enthält, wenn $\mathfrak{P}$ ein Gebiet in $\mathfrak{R}$ durchläuft. Hierfür ist folgende Bedingung notwendig und hinreichend:

Der Rang von $\boldsymbol{\Omega}_k$ *auf* $\mathfrak{R}$ *ist gleich* k.

Setzen wir außerdem voraus, daß der Riemannsche Bereich $\mathfrak{R}$ *kompakt* sei, so liefert die Anwendung des Satzes 3.9 a) auf die Gleichungssysteme von $\boldsymbol{\Omega}_k$ das Ergebnis (vgl. [5], S. 45):

Es gibt ein Gebiet des z-Raumes mit kanonischer Menge für $\boldsymbol{\Omega}_k$.

Hieraus ergibt sich wegen Satz 4.9 a):

Es sei $\mathfrak{R}$ *ein kompakter Riemannscher Bereich. Der Rang der meromorphen Abbildung* $\boldsymbol{\Omega}_k$ *von* $\mathfrak{R}$ *sei* k. *Dann besitzt* $\boldsymbol{\Omega}_k$ *einen regulären Punkt.*

5.3. Die Sätze 3.9, 3.10 und 4.9 lassen erkennen, daß im Falle eines einzigen Parameters schärfere Aussagen möglich sind als bei $k > 1$. Diesen Umstand nutzen wir dadurch aus, daß wir die Urbildmengen von analytischen Ebenen des z-Raumes untersuchen. Wir legen durch den (endlichen) Punkt z^* des z-Raumes ein Büschel analytischer Ebenen:

$$z_j = z_j^* + t\zeta_j, \qquad j = 1, \ldots, k, \tag{21}$$

ζ_j feste Konstanten, welche die Lage der Ebene bestimmen, t laufende Koordinate auf der Ebene. Abgekürzt schreiben wir für (21):

$$z = z^* + t\zeta. \tag{22}$$

Wieder werden bestimmte Urbildmengen von Gebieten auf (21) als Fasermengen ausgezeichnet (vgl. [5], S. 38, und beachte die Unterschiede):

Es sei $\bar{t}$ ein Punkt und $T(\bar{t})$ eine Umgebung von $\bar{t}$ in der t-Ebene[4]).

A. Es gebe auf $\mathfrak{R}' = \{\mathfrak{R}, T(\bar{t})\}$ eine kanonische Menge $\mathfrak{N}' = \mathfrak{N}'(t)$, $t \in T(\bar{t})$, mit folgenden Eigenschaften:

a) Ist $\mathfrak{P}' = \{\mathfrak{P}, t'\} \in \mathfrak{R}'$, $t' \neq \bar{t}$ [11]), $z' = z^* + t'\zeta = \boldsymbol{\Omega}_k(\mathfrak{P})$, so sei $\mathfrak{P}' \in \mathfrak{N}'$.

b) Ist $\mathfrak{P}' = \{\mathfrak{P}, t'\} \in \mathfrak{N}'$, so sei $z' = z^* + t'\zeta = \boldsymbol{\Omega}_k(\mathfrak{P})$.

Dann heiße $\mathfrak{N}'$ kanonische Menge von $\boldsymbol{\Omega}_k$ für das Gebiet $T(\bar{t})$ in der Ebene (21). Jede analytische Komponente von $\mathfrak{N}'$ werde (t-)[10]) *Fasermenge von $T(\bar{t})$* genannt.

B. Ein Punkt $\bar{t}$ heiße (t-)[10]) *regulär*, wenn gilt:

a) Es gebe eine Umgebung $T(\bar{t})$ von $\bar{t}$ mit kanonischer Menge $\mathfrak{N}'$ von $\boldsymbol{\Omega}_k$.

b) In der Bedingung a) der Definition der kanonischen Menge ist die Ungleichung $t' \neq \bar{t}$ wegzulassen.

c) $\mathfrak{N}'$ habe die Eigenschaften α), β), γ) (vgl. 4.6).

Als (t-) *Fasermenge*[10]) *des regulären Punktes $\bar{t}$* bezeichnen wir jede analytische Komponente von $\mathfrak{N}'$.

C. Jeder Punkt der t-Ebene, der Häufungspunkt von t-regulären Punkten, selbst aber nicht t-regulär ist, heiße *singulär*.

5.4. Es folgen Sätze über die Verteilung der regulären und singulären Punkte in einer beliebigen, jedoch festzuhaltenden Ebene (21). Unmittelbar aus Definition 5.3 ergibt sich:

I. *Jeder reguläre Punkt besitzt eine Umgebung, die aus regulären Punkten besteht.*

Die kanonische Menge eines Gebietes $T(\bar{t})$ ist in der Umgebung jedes Punktes von $\mathfrak{R}'$ Lösungsmenge des zu $\boldsymbol{\Omega}_k$ gehörigen Gleichungssystems (vgl. 2.4) und des Systems (21). Wenden wir auf diese Gleichungssysteme den Satz 3.9 b)[12]) unter der Voraussetzung an, daß der Punkt $\bar{t}$ singulär ist, so ergibt sich unter Berücksichtigung der Definitionen 5.3 A und C:

II. *Wenn der Riemannsche Bereich $\mathfrak{R}$ kompakt ist, besitzt ein singulärer Punkt eine Umgebung mit kanonischer Menge von $\boldsymbol{\Omega}_k$.*

Wegen Satz 4.9 b) folgt daraus:

III. *Wenn der Riemannsche Bereich $\mathfrak{R}$ kompakt ist, besitzt jeder singuläre Punkt $\bar{t}$ eine Umgebung, die mit Ausnahme von $\bar{t}$ nur reguläre Punkte enthält.*

5.5. Wir können auch den Fall des unendlich fernen Punktes der t-Ebene in die Betrachtung einbeziehen. Dazu führen wir $t' = 1/t$ ein, ersetzen (21) durch das System:

$$t' z_j = t' z_j^* + \zeta_j, \qquad j = 1, \ldots, k, \tag{23}$$

und suchen die Lösungen der zu $\boldsymbol{\Omega}_k$ gehörenden Gleichungssysteme und des Systems (23) in $\{\mathfrak{R}$, Umgebung von $t' = 0\}$.

[11]) Man beachte diese Voraussetzung; sie hat ihren Grund in der Struktur des Satzes 3.9 (b).

[12]) Vgl. Nr. 5.3, Bedingung A, a) und Fußnote [11]).

Daher gelten die Ergebnisse I., II. und III. auch für den unendlich fernen Punkt der t-Ebene.

5.6. Aus 5.4 und 5.5 fließt folgende Erkenntnis:

Der Riemannsche Bereich $\mathfrak{R}$ sei kompakt. Wenn die Menge der t-regulären Punkte nicht leer ist, gibt es in der t-Ebene außer endlich vielen singulären Punkten nur t-reguläre Punkte.

5.7. Vollkommenen Aufschluß über den Zusammenhang zwischen den Fasermengen regulärer und singulärer Punkte erhalten wir durch folgende Sätze, die mit dem Satz 4.9 bewiesen werden:

I. Die gemäß Definition 5.3 zu den regulären Punkten t_1 und t_2 gehörenden Umgebungen $T(t_1)$ bzw. $T(t_2)$ mögen den nichtleeren Durchschnitt $D(t_1, t_2)$[4]) haben. Die Fasermengen von t_λ seien $\mathfrak{N}_\lambda^\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, \alpha_\lambda$; $\lambda = 1, 2$. Dann ist $\alpha_1 = \alpha_2$, und bei geeigneter Verteilung der Indizes gilt:

$$\mathfrak{N}_1^\alpha \cap \{\mathfrak{R}, D(t_1, t_2)\} = \mathfrak{N}_2^\alpha \cap \{\mathfrak{R}, D(t_1, t_2)\}, \tag{24}$$

$\alpha = 1, \ldots, \alpha_1 = \alpha_2$.

II. Es sei $\bar{t}$ ein singulärer Punkt und $T(\bar{t})$ eine Umgebung von $\bar{t}$ mit kanonischer Menge. $T(\bar{t}) - \bar{t}$ bestehe aus regulären Punkten.

a) Es sei $\mathfrak{N}'$ eine Fasermenge von $T(\bar{t})$. Jeder Punkt $t^* \in T(\bar{t}) - \bar{t}$ hat eine Umgebung $\mathfrak{T}(t^*)$ derart, daß die analytischen Komponenten von

$$(\mathfrak{N}') = \mathfrak{N}' \cap \{\mathfrak{R}, \mathfrak{T}(t^*)\}$$

Fasermengen des (regulären) Punktes t^* sind.

b) Jede Fasermenge des Punktes $t^* \in T(\bar{t}) - \bar{t}$ kann aus einer Fasermenge des Gebietes $T(\bar{t})$ auf die in a) beschriebene Weise erhalten werden.

5.8. Beschränken wir uns auf kompakte Riemannsche Bereiche, so zeigen 5.6 und 5.7, daß die Fasermengen der Punkte einer Ebene (21) wie die Zweige einer algebraischen Funktion von t zusammenhängen. Die Fasermengen eines regulären Punktes können nach allen regulären Punkten hin analytisch fortgesetzt werden, wobei wegen (24) die Fortsetzung auf jedem Wege, der die singulären Punkte vermeidet, eindeutig ist. Wie 5.7 II. zeigt, spielen die singulären Punkte bei diesen Fortsetzungen die Rolle von Verzweigungspunkten; d.h. setzen wir eine Fasermenge von einem regulären Punkte aus auf einem geschlossenen Wege, der keinen singulären Punkt enthält, analytisch fort, so kommen wir im Ausgangspunkt eventuell mit einer Fasermenge an, die von der Ausgangsmenge verschieden ist.

5.9. Aufzuklären ist noch die Frage, ob die Ebene (21) t-reguläre Punkte enthält. In befriedigender Weise gibt darüber folgender Satz, dessen Beweis auf 4.6 beruht, Auskunft:

Es sei z^* ein regulärer Punkt der meromorphen Abbildung $\mathfrak{Q}_k$ des Riemannschen Bereiches $\mathfrak{R}$ (vgl. 5.1). *Es sei eine beliebige Ebene* (21) *durch z^* gegeben. Dann ist der Punkt $t = 0$ ein t-regulärer Punkt in dieser Ebene. Die t-Fasermengen von $t = 0$ werden aus den Fasermengen von z^* durch Einsetzen von* (21) *erhalten.*

5.10. Im Falle eines kompakten Riemannschen Bereiches gestatten unsere Ergebnisse die folgende, zusammenfassende Deutung:

Wenn der Rang von $\mathfrak{Q}_k$ auf $\mathfrak{R}$ gleich k ist, existiert ein regulärer Punkt z^* von $\mathfrak{Q}_k$ (vgl. 5.2). Diesem Punkte werden Fasermengen zugeordnet. Durch z^* wird das Ebenenbüschel (21) gelegt; den Punkten jeder Ebene werden Fasermengen zugeordnet, die im beschriebenen Sinne algebraisch zusammenhängen (vgl. 5.8). Für die Gesamtheit aller so bestimmten Fasermengen führen wir die Bezeichnung „*Fasergesamtheit*" $\mathfrak{F}$ ein. Die Anzahl der Fasermengen von z^* heiße *Faseranzahl* f von $\mathfrak{F}$. Ebenso groß ist nach 5.9 übrigens auch die Anzahl der Fasermengen in den regulären Punkten einer Ebene (21); in den singulären Punkten ist sie höchstens gleich f.

§ 6. Funktionen auf der Fasergesamtheit einer meromorphen Abbildung.

6.1. Die Fasergesamtheit einer meromorphen Abbildung wird erst dadurch interessant, daß sie Definitionsbereich von meromorphen Funktionen sein kann. Die nähere Erklärung geben die folgenden Definitionen (vgl. [5], S. 42):

Es sei $\mathfrak{X}$ ein Riemannscher Elementarbereich; Z sei ein Gebiet des z-Raumes[4]). $\widetilde{\mathfrak{M}} = \widetilde{\mathfrak{M}}(z)$, $z \subset Z$ (vgl. 3.2), sei ein kanonischer Keim in $\widetilde{\mathfrak{X}} = \{\mathfrak{X}, Z\}$ mit der Keimprojektion $\widetilde{Y}^{(\varrho)} = \{Y^{(\varrho)}, Z\}$ und der Verzweigungsprojektion $v(\widetilde{\mathfrak{M}})$ (vgl. 1.13).

Es sei $\tilde{y}_0 = \{(y^0)_\varrho, z^0\}$ ein Punkt von $\widetilde{Y}^{(\varrho)} - v(\widetilde{\mathfrak{M}})$; seine Überlagerungspunkte in $\widetilde{\mathfrak{M}}$ seien $\widetilde{\mathfrak{P}}_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, a$. Da diese Punkte nicht in der Verzweigungsmenge von $\widetilde{\mathfrak{X}}$ liegen, können die Koordinaten $\{y, z\}$ für sie als Ortsuniformisierende gewählt werden. $\widetilde{\mathfrak{M}}$ besitzt in $\widetilde{\mathfrak{P}}_\alpha$ einen einzigen Primkeim $\widetilde{\mathfrak{E}}_\alpha$; seine Projektion $\widetilde{E}_\alpha = \widetilde{A}(\widetilde{\mathfrak{E}}_\alpha)$ besitzt eine Darstellung:

$$y_{\varrho+j} = \psi_{\varrho+j}^{(\alpha)}\left((y)_\varrho, z\right), \qquad j = 1, \ldots, n-\varrho, \tag{25}$$

$\psi_{\varrho+j}^{(\alpha)}$ analytisch in $\tilde{y}_0$.

6.2. Die Funktion $f(\mathfrak{P}, z)$ sei analytisch in $\widetilde{\mathfrak{X}}$. In der Umgebung von $\widetilde{\mathfrak{P}}_\alpha$ ist $f A^{-1}$ eine analytische Funktion $f_\alpha(y, z)$ der Ortsuniformisierenden $\{y, z\}$. In diese Funktion setzen wir die Entwicklungen (25) ein:

$$f_\alpha'\left((y)_\varrho, z\right) = f_\alpha\left((y)_\varrho, \psi_{\varrho+1}^{(\alpha)}, \ldots, \psi_n^{(\alpha)}, z\right). \tag{26}$$

Das Produkt:

$$N\left((y)_\varrho, z\right) = \prod_{\alpha=1}^{a} f_\alpha'\left((y)_\varrho, z\right) \tag{27}$$

heiße *Normfunktion* von f bezüglich $\widetilde{\mathfrak{M}}$; N ist eindeutig und analytisch in $\widetilde{Y}^{(\varrho)}$.

6.3. Die Funktion $w = w(\mathfrak{P})$ sei meromorph in $\mathfrak{X}$. Ist $w = h(\mathfrak{P})/g(\mathfrak{P})$, g, h analytisch in $\mathfrak{X}$, so bilden wir die Norm von $g(\mathfrak{P})\, w - h(\mathfrak{P})$ bezüglich $\widetilde{\mathfrak{M}}$ und erhalten, falls auf keiner analytischen Komponente von $\widetilde{\mathfrak{M}}$ $g(\mathfrak{P}) \equiv 0$ ist, ein

Polynom von w mit Koeffizienten, die in $\tilde{Y}^{(\varrho)}$ analytisch sind:

$$\Phi\left(w/(y)_\varrho, z\right) = a_0\left((y)_\varrho, z\right) w^s + \cdots + a_s\left((y)_\varrho, z\right). \tag{28}$$

w genügt auf $\tilde{\mathfrak{M}}$ der Gleichung:

$$\Phi\left(w/(y)_\varrho, z\right) = 0. \tag{29}$$

Wenn die Funktionen $a_i\left((y)_\varrho, z\right)/a_0\left((y)_\varrho, z\right)$, $i = 1, \ldots, s$, unabhängig von $(y)_\varrho$ sind, nennen wir w *„endlich mehrdeutig"* auf $\tilde{\mathfrak{M}}$.

Hat das Polynom Φ folgende spezielle Gestalt:

$$\Phi = c\left((y)_\varrho, z\right)\left(w - a(z)/b(z)\right)^s, \tag{30}$$

c analytisch in $\tilde{Y}^{(\varrho)}$, $a(z)$, $b(z)$ analytisch in Z, so heiße w *„eindeutig"* auf $\tilde{\mathfrak{M}}$.

6.4. Die Eigenschaft einer Funktion w, auf einem kanonischen Keim endlich mehrdeutig zu sein, ist invariant gegenüber analytischer Fortsetzung; es gilt nämlich:

$\tilde{\mathfrak{M}} = \tilde{\mathfrak{M}}(z)$ sei analytisch zusammenhängend. Es gebe einen Primkeim von $\tilde{\mathfrak{M}}$, auf dem die meromorphe Funktion w endlich mehrdeutig ist. Dann ist w endlich mehrdeutig auf $\tilde{\mathfrak{M}}$.

Wenn $\tilde{\mathfrak{M}}$ zusätzlich noch ausgezeichnet ist, ist w eindeutig auf $\tilde{\mathfrak{M}}$.

Während die erste Behauptung des Satzes durch analytische Fortsetzung bewiesen wird (vgl. [4], S. 266 und [5], S. 43), folgt die zweite aus dem Satz 3.6, nach dem $\tilde{\mathfrak{M}}(\bar{z})$ für alle $\bar{z} \in Z$ analytisch zusammenhängend ist.

6.5. Wir gehen zur Untersuchung dieser Dinge in Riemannschen Bereichen über. Es sei $\mathfrak{R}$ ein Riemannscher Bereich und Z ein Gebiet des z-Raumes[4]). $\tilde{\mathfrak{M}} = \tilde{\mathfrak{M}}(z)$, $z \in Z$, sei eine kanonische Menge in $\tilde{\mathfrak{R}} = \{\mathfrak{R}, Z\}$. Die Funktion w sei meromorph in $\mathfrak{R}$; sie heiße *„endlich mehrdeutig"* bzw. *„eindeutig"* auf $\tilde{\mathfrak{M}}$, wenn sie auf jedem kanonischen Keim von $\tilde{\mathfrak{M}}$ (vgl. 4.2 C) endlich mehrdeutig bzw. eindeutig ist. Im ersten Falle besteht für w auf $\tilde{\mathfrak{M}}$ eine algebroide Gleichung:

$$c_0(z)\, w^s + c_1(z)\, w^{s-1} + \cdots + c_s(z) = 0, \tag{31}$$

$c_\nu(z)$, $\nu = 0, 1, \ldots, s$, analytisch in Z; im zweiten Falle gilt auf $\tilde{\mathfrak{M}}$:

$$w = a(z)/b(z), \tag{32}$$

$a(z)$, $b(z)$ analytisch in Z.

Die Aussage 6.4 überträgt sich ohne Änderung auf kanonische Mengen in Riemannschen Bereichen.

6.6. Betrachten wir nun den Fall, daß die kanonische Menge $\tilde{\mathfrak{M}}$ Fasermenge einer meromorphen Abbildung ist.

Ω_k sei eine meromorphe Abbildung des kompakten Riemannschen Bereiches $\mathfrak{R}$ und habe eine Fasergesamtheit $\mathfrak{F}$ (vgl. 5.10).

Wenn die in $\mathfrak{R}$ meromorphe Funktion w auf allen Fasermengen von $\mathfrak{F}$ endlich mehrdeutig ist, heiße w *meromorph auf der Fasergesamtheit* $\mathfrak{F}$.

Die Funktion w ist meromorph auf $\mathfrak{F}$, wenn sie auf den Fasermengen des regulären Punktes z^* eindeutig und analytisch ist. Nach 5.9 folgt nämlich hieraus ihre Eindeutigkeit auf den t-Fasermengen des Punktes $t=0$ einer beliebigen Ebene durch z^*; aus dieser ergibt sich wegen 5.8 und 6.4, daß w auf allen t-Fasermengen von t-regulären Punkten eindeutig und von singulären Punkten endlich mehrdeutig ist.

6.7. Die folgende Bedingung läßt die Bedeutung dieser Begriffsbildungen klar erkennen: Die Funktion w ist auf der Fasergesamtheit $\mathfrak{F}$ von $\boldsymbol{\Omega}_k$ meromorph, wenn es einen Punkt $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{R}$ und in $\mathfrak{P}$ ein System von Ortsuniformisierenden $(x)_n$ gibt, so daß der Rang der Funktionalmatrix:

$$\begin{pmatrix} \partial z_i \\ \partial x_j \\ \partial w \\ \partial x_j \end{pmatrix} \qquad (i = 1, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, n) \tag{33}$$

in bezug auf identisches Verschwinden der Determinanten gleich k ist.

Zu beweisen ist nach 6.6 nur die Eindeutigkeit von w auf den Fasermengen des regulären Punktes z^* von $\boldsymbol{\Omega}_k$, und diese folgt aus der Definition der Fasermenge (vgl. 5.1) und der Rangvoraussetzung (vgl. [5], S. 47).

6.8. Die Theorie der meromorphen Abbildungen gipfelt in dem folgenden Hauptsatz der Arbeit [4]:

Die in $\mathfrak{R}$ meromorphe Funktion w sei auf der Fasergesamtheit der meromorphen Abbildung $\boldsymbol{\Omega}_k$ von $\mathfrak{R}$ meromorph. Dann genügt w einer algebraischen Relation in $(z)_k$, deren Grad in w unterhalb einer Schranke liegt, die allein durch die Abbildung $\boldsymbol{\Omega}_k$ bestimmt wird und von w unabhängig ist.

Wir skizzieren den Beweis dieses Satzes und verweisen wegen der Einzelheiten auf [4], S. 276. Zu jeder der f Fasermengen $\tilde{\mathfrak{M}}_\nu$ des regulären Punktes z^* gehört nach 6.4 und 6.5 eine meromorphe Funktion $w_\nu = a_\nu(z)/b_\nu(z)$, welche die Werte von w auf $\tilde{\mathfrak{M}}_\nu$ angibt. Es sei S eine ganz rationale und symmetrische Funktion von $w_1, \ldots, w_f$. Es wird gezeigt, daß S eine rationale Funktion von z ist. Daraus ergibt sich unsere Behauptung, wenn wir für S die elementarsymmetrischen Funktionen der w_ν nehmen. Zunächst ist $S(z)$ in der Umgebung von z^* meromorph in z. Es bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit anzunehmen, daß w in z^* sogar analytisch ist, sonst müßte man den Punkt z^* etwas verschieben. Betrachten wir dann S auf einer festen Ebene des Büschels (21) durch z^*. Wie aus dem algebraischen Zusammenhang der t-Fasermengen in dieser Ebene (vgl. 5.8) leicht folgt, ist S in der t-Ebene eindeutig und überall meromorph und nach einem bekannten Satz deswegen rational in t. Man sieht, daß die Funktion S in allen Ebenen des Büschels rational in t ist. Der Zusammenhang zwischen den rationalen Funktionen in

verschiedenen Ebenen wird klar, wenn wir den z-Raum der folgenden Cremona-Transformation unterwerfen:

$$(34) \qquad \begin{cases} z_i = z_i^* + t\zeta_i & (i = 1, \ldots, l-1,\ l+1, \ldots, k), \\ z_l = z_l^* + t. \end{cases}$$

Hier ist ζ nun als variabel anzusehen. Setzen wir (34) in $S(z)$ ein, so erhalten wir eine Funktion von t und ζ mit folgenden Eigenschaften:

a) $S(t, \zeta)$ ist analytisch in t und ζ, wenn t in der Umgebung von $t = 0$ und ζ in der Umgebung eines beliebigen Punktes ζ^0 variieren.

b) Wenn ζ irgendwie spezialisiert wird, so entsteht eine rationale Funktion von t, denn diese Spezialisierung bedeutet nach der Form der Cremona-Transformation, daß wir eine bestimmte Ebene des Büschels durch z^* auswählen.

Nach einem bekannten Satz der Funktionentheorie ([1], S. 282) folgt aus diesen Eigenschaften für $S(t, \zeta)$ die Darstellung:

$$(35) \qquad S(t, \zeta) = \frac{\varphi_0 + \varphi_1 t + \cdots + \varphi_p t^p}{\psi_0 + \psi_1 t + \cdots + \psi_p t^p},$$

wobei die φ_ν und ψ_ν in ζ^0 analytisch sind und $\psi_0(\zeta^0) \neq 0$ ist. Diese Darstellung zeigt, daß S in allen endlichen Punkten des $\{t, \zeta\}$-Raumes meromorph ist. Machen wir die Cremona-Transformation (34) rückgängig, so ergibt sich meromorphes Verhalten von $S(z)$ in allen endlichen Punkten des z-Raumes mit Ausnahme derjenigen Punkte, die $t = 0$ entsprechen, weil in diesen Punkten (34) singulär ist. $t = 0$ bedeutet $z_l = z_l^*$. Dieses Ergebnis besteht für $l = 1, \ldots, k$. Durch Zusammenfassung kommt heraus: $S(z)$ ist in allen endlichen Punkten des z-Raumes meromorph mit alleiniger Ausnahme eventuell des Punktes z^*; aber in z^* ist $S(z)$ nach Konstruktion sogar analytisch. Es ist also $S(z)$ in allen endlichen Punkten des z-Raumes meromorph. Um das Verhalten von S in den unendlich fernen Punkten des z-Raumes (der Funktionentheorie) zu studieren, nehmen wir eine lineare Transformation des z-Raumes vor:

$$(36) \qquad z'_{i_\lambda} = 1/(z_{i_\lambda} - \alpha_{i_\lambda}), \qquad z'_{i_\mu} = z_{i_\mu} \quad \text{für} \quad i_\mu \neq i_\lambda.$$

Hier ist α_{i_λ} von $z^*_{i_\lambda}$ verschieden zu wählen. Auch die Funktionen z'_j, $j = 1, \ldots, k$, bestimmen eine meromorphe Abbildung von $\mathfrak{R}$, deren Rang in $\mathfrak{R}$ wiederum k ist. Wegen 5.2 besitzt diese Abbildung eine Fasergesamtheit, auf der die Funktion w meromorph ist. Mit denselben Schlüssen wie für $S(z)$ wird gezeigt, daß $S(z')$ in allen endlichen Punkten des z'-Raumes meromorph ist. Diese Feststellung gilt für alle Transformationen (36), die unendliche Punkte des z-Raumes ins Endliche holen. Da also die Funktion S in allen endlichen und unendlichen Punkten des z-Raumes meromorph ist, ist sie nach einem bekannten Satze rational. Der Grad der algebraischen Relation zwischen w und $(z)_k$ ist in w höchstens gleich der Faseranzahl f der Fasergesamtheit $\mathfrak{F}$. Damit ist auch der letzte Teil des Hauptsatzes bewiesen.

6.9. Wir fassen die Hauptergebnisse zusammen, wobei wir alle Voraussetzungen wiederholen.

Hauptsatz I. *Es sei $\mathfrak{R}$ ein kompakter Riemannscher Bereich. $\mathfrak{Q}_k$ sei die meromorphe Abbildung:*

$$z_j = f_j(\mathfrak{P}), \qquad j = 1, \ldots, k,$$

von $\mathfrak{R}$; der Rang von $\mathfrak{Q}_k$ auf $\mathfrak{R}$ sei k. Die Funktion w sei meromorph in $\mathfrak{R}$. Es gebe einen Punkt $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{R}$ und in $\mathfrak{P}$ ein System von Ortsuniformisierenden $(x)_n$, so daß der Rang der Funktionalmatrix:

$$\left(\begin{matrix} \frac{\partial z_i}{\partial x_j} \\ \frac{\partial w}{\partial x_j} \end{matrix}\right), \qquad i = 1, \ldots, k, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

gleich k ist. Dann besteht zwischen w und $z_1, \ldots, z_k$ eine algebraische Relation:

$$g(w, z_1, \ldots, z_k) = 0,$$

g Polynom von $w, z_1, \ldots, z_k$. Das Polynom g kann so gewählt werden, daß sein Grad in w unterhalb einer Schranke liegt, die allein durch die Abbildung $\mathfrak{Q}_k$ bestimmt wird, also unabhängig von w ist.

6.10. Eine kürzere Formulierung dieses Satzes ist:

Hauptsatz II. *Es sei $\mathfrak{R}$ ein kompakter Riemannscher Bereich. Wenn in $\mathfrak{R}$ meromorphe Funktionen auf $\mathfrak{R}$ analytisch voneinander abhängen, so sind sie algebraisch abhängig.*

6.11. Ein Spezialfall von Hauptsatz II ist:

Hauptsatz III. *Zwischen $n+1$ meromorphen Funktionen auf einem $2n$-dimensionalen, kompakten Riemannschen Bereich besteht eine algebraische Relation.*

Literatur.

[1] Osgood, W. F.: Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. II/1, 2. Aufl. Leipzig u. Berlin 1929. — [2] Behnke, H., u. K. Stein: Modifikationen komplexer Mannigfaltigkeiten und Riemannscher Bereiche. Math. Ann. **124**, 1—16 (1950). — [3] Thimm, W.: Über ausgeartete meromorphe Abbildungen. I. Math. Ann. **125**, 145—164 (1952). — [4] Thimm, W.: Über ausgeartete meromorphe Abbildungen. II. Math. Ann. **125**, 264—283 (1953). — [5] Thimm, W.: Über meromorphe Abbildungen von komplexen Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. **128**, 1—48 (1954).

Bonn, Mathematisches Seminar der Universität.

(Eingegangen am 28. März 1954.)

Hämisch, W.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 458—487 (1954)

Über die Topologie in der Algebra.

Von
Werner Hämisch.

Die vorliegende Arbeit wurde angeregt durch ein von Herrn Krull [1] entworfenes Programm. Demgemäß überträgt sie die Topologisierungsmethoden, die von der Theorie der unendlichen Gruppen und von der Idealtheorie der kommutativen Ringe her bekannt sind, auf allgemeine Algebren im Sinne von Birkhoff [1], d.h. auf Mengen mit beliebig vielstelligen Operatoren.

Durch das Beiseitelassen der Gruppen- und Ringaxiome kann in der Tat gerade das Wesentliche der topologischen Algebra deutlich gemacht werden. Insbesondere zeigt sich hierbei: 1. Bildet man nicht nur die gewöhnlichen topologischen Produkte, sondern auch allgemeinere, auf sog. Aufbaumengen bezogene $\mathfrak{L}$-Produkte, dann lassen sich die in der Algebra bekannten Topologisierungsmethoden zurückführen auf die topologische Multiplikation diskreter Algebren (§ 4 und § 5). 2. Deutet man die den direkten und subdirekten Summen- bzw. Produktdarstellungen von Gruppen und Ringen entsprechenden Zerlegungen einer Algebra in einfacher strukturierte Algebren als Analysen der Struktur dieser Algebra (man denke etwa an die Strukturätze der hyperkomplexen Systeme), dann läßt sich die algebraische Topologisierung von Algebren mit anschließender Bildung der vollständigen Hülle verstehen als eine wesentlich feinere und durchaus naturgemäße Strukturanalyse (§ 5). 3. Die Gruppen und Ringe sind vor den allgemeinen Algebren im Hinblick auf die algebraischen Topologien vor allem dadurch ausgezeichnet, daß bei ihnen die Komposition der Kongruenzen stets kommutativ ist und überdies noch eine eineindeutige Korrespondenz zwischen den Kongruenzen und ihren Nullklassen, den sog. Kernen besteht (§ 7).

§ 1 und § 2 bauen auf dem Mengen- und dem Abbildungsbegriff organisch die allenthalben in der Mathematik und insbesondere in der Algebra benötigten Grundbegriffe in einer einheitlichen Bezeichnungsweise auf, die so vielseitigen Anforderungen gewachsen ist, wie sie hier die allgemeinen Betrachtungen stellen. § 2 enthält außerdem noch die wichtigsten Sätze über Kongruenzen, insbesondere über deren Verhalten bei homomorphen Abbildungen.

§ 3 behandelt die Kongruenztopologien. Außer einigen grundlegenden Sätzen über die Hüllen von Teilmengen und von Relationen zeigt er, daß die oben genannten $\mathfrak{L}$-Produkte (auf Grund ihrer Beziehung zu sog. $\mathfrak{L}$-Schnitten von Filterbasen) und unter gewissen bei Gruppen und Ringen stets erfüllten Voraussetzungen auch die Quotienten von Kongruenztopologien wieder Kongruenztopologien sind. § 4 präzisiert den Begriff der algebraischen Topologien — es sind dies einfach die Kongruenztopologien — und enthält unter anderem

en Satz von der Vollständigkeit der $\mathfrak{L}$-Produkte kongruenztopologisch voll-ständiger Algebren.

Die Betrachtung der Zerlegungen einer Algebra unter dem Blickwinkel er Strukturanalyse führt in § 5 ohne Künstlichkeit dazu, eine Algebra nach Maßgabe der gewählten Zerlegung in gewissem Sinne zu vervollständigen, nd es ist dann evident, daß sich dieser Prozeß auch als Bildung einer voll-ständigen Hülle im topologischen Sinne deuten läßt, wenn man eine im esentlichen durch die Zerlegung bestimmte Kongruenztopologie zugrunde egt. Eine eingehende Untersuchung der Beziehungen zwischen der Topologie n der Hülle und der in der Algebra selbst zeigt dann, daß die Hülle durch ie Algebra und deren Topologie bis auf Isomorphie hinsichtlich ihrer alge-raisch-topologischen Gesamtstruktur eindeutig bestimmt ist und daß man ich dementsprechend im allgemeinen auf die Betrachtung einer besonders infachen Darstellung der Hüllen, auf die sog. $\mathfrak{T}$-Hüllen beschränken kann.

§ 6 enthält nun eine kleine Theorie der $\mathfrak{T}$-Hüllen. Es wird zunächst unter-ucht, wie weit im allgemeinen das Vervollständigen einer Algebra vertausch-ar ist mit den elementaren Operationen zur Ableitung neuer Algebren, ämlich mit der Auswahl von Unteralgebren und der Bildung von Produkt- und Quotientalgebren. Während die Vertauschbarkeit in den beiden ersten Fällen besteht, gilt sie im letzten Falle anscheinend nicht allgemein, doch gibt es verhältnismäßig einfache Bedingungen, unter denen sie beinahe gilt, d.h. bis auf die Stetigkeit der Umkehrung beim Isomorphismus des Quotienten der Hülle auf die Hülle des Quotienten.

Des weiteren wird eine Möglichkeit untersucht, die Hülle einer Algebra in Hüllen der gleichen Algebra so zu zerlegen, daß sie hinsichtlich ihrer alge-braisch-topologischen Gesamtstruktur in ein Produkt von unter Umständen einfacher strukturierten Hüllen eingebettet erscheint. Dies kann geschehen, wenn die der Vervollständigung zugrunde liegende Topologie eine gewisse, z.B. die gröbste, gemeinsame Verfeinerung von Kongruenztopologien ist. Als eine Anwendung dieser Hüllenzerlegung ordnet sich hier die allgemeine Dar-stellung einer bemerkenswerten Schlußweise von Zariski [1] ein.

§ 7 widmet sich schließlich den besonderen Verhältnissen bei Gruppen mit allgemeinen, d.h. mit beliebig vielstelligen Operatoren und dort insbesondere der zwischen den Kongruenzen und ihren Kernen bestehenden Korrespondenz. Diese ist nicht nur ein Verbandsisomorphismus, bei dem die Komposition zweier Kongruenzen in die Summe der zugeordneten Kerne übergeht, es ent-sprechen sich bei dieser Zuordnung auch die topologischen Hüllen der Kon-gruenzen und Kerne, und zwar sowohl die Hüllen bezüglich der nicht vervoll-ständigten als auch die bezüglich der vervollständigten Kongruenztopologie.

§ 1. Die allgemeinen Grundbegriffe.

1.1. Mengen und Abbildungen. Es bedeute $\mathfrak{p}_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_n}$ eine Aussage über $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$ und $a_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_n}$ einen von $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$ abhängigen Term. Die Menge der $a_\varkappa$ mit einem der Bedingung $\mathfrak{p}_\varkappa$ genügenden Argument $\varkappa$ bezeichnen wir durch $\{a_\varkappa|_\varkappa \mathfrak{p}_\varkappa\}$ oder, wenn die Bedingung $\mathfrak{p}_\varkappa$ selbstverständlich ist, durch

$\{a_\varkappa|\varkappa\}$. Weitere Vereinfachungen sind $\{\varkappa|_\varkappa p_\varkappa\} = \{\varkappa|p_\varkappa\}$ und $\{a_\varkappa|_\varkappa \varkappa = 1, \ldots, k\}$ $= \{a_1, \ldots, a_k\}$. (Vgl. hierzu etwa LEFSCHETZ [1].)

Folgt für $\{\varkappa', \varkappa''\} \leq \{\varkappa|p_\varkappa\}$ stets $a_{\varkappa'} = a_{\varkappa''}$ aus $a'_{\varkappa'} = a'_{\varkappa''}$, dann bezeichnen wir die Abbildung oder, wie wir auch sagen werden, die Funktion, die $a'_\varkappa$ für $\varkappa \in \{\varkappa|p_\varkappa\}$ auf $a_\varkappa$ abbildet, durch $(a_\varkappa|_\varkappa a'_\varkappa|p_\varkappa)$ oder, wenn die Bedingung $p_\varkappa$ selbstverständlich ist, durch $(a_\varkappa|_\varkappa a'_\varkappa)$. Weitere Vereinfachungen sind $(a_\varkappa|_\varkappa \varkappa|p_\varkappa) = (a_\varkappa|_\varkappa p_\varkappa)$ und $(a_\varkappa|_\varkappa \varkappa) = (a_\varkappa|\varkappa)$ sowie $(a_\varkappa|_\varkappa \varkappa = 1, \ldots, k) = (a_1, \ldots, a_k)$, wenn k eine Variable oder > 1 ist.

Sehr bequem ist die folgende Vereinbarung: $\{a'_{(a_\varkappa \varkappa)}|p_{(a_\varkappa \varkappa)}\}$ bedeute $\{a'_{(a_\varkappa \varkappa)}|_{(a_\varkappa \varkappa)} p_{(a_\varkappa \varkappa)}\}$, wenn die $a_\varkappa$ die einzigen Variablen sind, die in $a'_{(a_\varkappa \varkappa)}$ und $p_{(a_\varkappa|\varkappa)}$ zugleich vorkommen. (Vgl. die EINSTEINsche Summationsvorschrift in der Tensorrechnung.) Entsprechend sind die Symbole $(a''_{(a_\varkappa|\varkappa)}|a'_{(a_\varkappa \varkappa)}|p_{(a_\varkappa|\varkappa)})$, $(a''_{(a_\varkappa|\varkappa)}|a'_{(a_\varkappa|\varkappa)})$ und $(a'_{(a_\varkappa|\varkappa)}|p_{(a_\varkappa|\varkappa)})$ zu verstehen.

Das Element einer einelementigen Menge A bezeichnen wir durch $A^\bullet$ und leere Mengen stets durch $\varnothing$. $x\,\varkappa$ bezeichne das Bild von $\varkappa$ bei der Abbildung x [1]).

Es sei jetzt f eine Abbildung einer Menge von Funktionen $x = (a_\varkappa|\varkappa \in K)$. Wir schreiben dann

$$f(a_\varkappa|\varkappa \in K) = f_{\substack{\varkappa \\ \varkappa \in K}} a_\varkappa = f_{\varkappa \in K} a_\varkappa = f_\varkappa a_\varkappa \tag{1.1.1}$$

und

$$f_{\varkappa=1,\ldots,k} a_\varkappa = a_1 f \ldots f a_k \tag{1.1.2}$$

in Analogie zur Summenbezeichnung $\sum(a_1, \ldots, a_k) = \sum_{\substack{\varkappa \\ 1 \leq \varkappa \leq k}} a_\varkappa = \sum_{\varkappa=1,\ldots,k} a_\varkappa = \sum_\varkappa a_\varkappa = a_1 + \cdots + a_k$. Insbesondere wird also $f(a|_\varkappa \varkappa) = f_\varkappa a$.

Existiert $f\,x$ *nur* für Funktionen x mit dem Definitionsbereich K, dann werden für jede echte Teilmenge K' von K *partielle Funktionen*

$$f(a_{\varkappa'}|\varkappa' \in K') = f_{\varkappa' \in K'} a_{\varkappa'} = \left(f_{\varkappa \in K} a_\varkappa | (a_{\varkappa''}|\varkappa'' \notin K')\right) \tag{1.1.3}$$

von f definiert. Es gilt also

$$(f_{\varkappa' \in K'} a_{\varkappa'})_{\varkappa'' \notin K'} a_{\varkappa''} = (f_{\varkappa' \in K'} a_{\varkappa'})\,(a_{\varkappa''}|\varkappa'' \notin K') = f_{\varkappa \in K} a_\varkappa.$$

1.2. Mengenprodukte und Relationen.

$$\times(A_\varkappa|\varkappa \in K) = \times_{\varkappa \in K} A_\varkappa = \{(a_\varkappa|\varkappa)\,|\,a_\varkappa \in A_\varkappa \quad \textit{für alle} \quad \varkappa \in K\} \tag{1.2.1}$$

[1]) Man kann auch von $\{\varkappa|p_\varkappa\}$ und $(a_\varkappa|\varkappa)$ ausgehen und dann $\{a_\varkappa|_\varkappa p_\varkappa\}$ und $(a_\varkappa|_\varkappa a_\varkappa|p_\varkappa)$ als Abkürzungen für $\{a|a = a_\varkappa$ *für (wenigstens) ein* $\varkappa$ *mit* $p_\varkappa\}$ und $(\{a|a = a_\varkappa,\ a' = a'_\varkappa$ *für ein* $\varkappa$ *mit* $p_\varkappa\}^\bullet|a')$ einführen. Die Symbole $\{\varkappa|p_\varkappa\}$ und $(a_\varkappa|\varkappa)$ besitzen den Vorzug, daß sich ihr Gebrauch leicht beschreiben läßt, nämlich durch die Regeln: 1a. $\{\varkappa|p_\varkappa\} = \{\varkappa|p'_\varkappa\}$, genau wenn die Aussagen $p_\varkappa$ und $p'_\varkappa$ für jedes in Betracht kommende $\varkappa$ gleichwertig sind. 1b. $\varkappa' \in \{\varkappa|p_\varkappa\}$, genau wenn $p_{\varkappa'}$ gilt. 2a. $(a_\varkappa|\varkappa) = (a'_\varkappa|\varkappa)$, genau wenn $a_\varkappa = a'_\varkappa$ für alle in Betracht kommenden $\varkappa$ gilt. 2b. $(a_\varkappa|\varkappa)\,\alpha\,\varkappa' = a_{\varkappa'}$, wo das Anwendungssymbol α meist unterdrückt wird (s. Text!). — Die Bezeichnung $(a_1, \ldots, a_k)$ ist für den praktisch kaum interessierenden Fall $k = 1$ [man kann fast immer $(a|_\varkappa \varkappa = 1)$ durch a ersetzen] nicht erlaubt, weil nach den Klammerregeln $(a) = a$ gilt. — Jede von $x\,\varkappa$ verschiedene Verknüpfung von x und $\varkappa$ benötigt natürlich ein eigenes Verknüpfungssymbol. Daher darf z. B. auf der linken Seite der Gleichung $(a, b, c) \cdot 3 = (a \cdot 3, b \cdot 3, c \cdot 3)$ das Multiplikationszeichen nicht fehlen, denn es gilt ja $(a, b, c)\,3 = c$.

heißt das *Produkt der Mengen* $A_\varkappa$ mit $\varkappa \in K$. Insbesondere wird also $\times(A, B) = A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$. Wie üblich schreiben wir für die Menge der Abbildungen von K in A auch

(1.2.2) $$A^K = \times_{\varkappa \in K} A \quad \textit{und speziell} \quad A^{\{1, \ldots, k\}} = A^k.$$

Gemäß der Definition von $f^\sim$ in 1.3 bedeutet $f^\sim X$ die Bildmenge $\{f x | x \in X\}$ von X bei der Abbildung f [2]). Die Abbildung

(1.2.3) $$\varkappa^\circ = (x \varkappa | x \in \times_\varkappa A_\varkappa)$$

heißt die $\varkappa$-*Projektion* von $X = \times_\varkappa A_\varkappa$ auf $A_\varkappa$. (Beachte $\varkappa^\circ x = x \varkappa$ und die Verwendung von α in Anm. 1!) Mit $X' \subseteq \times_\varkappa A_\varkappa$ gilt auch noch $X' = \{(x' \varkappa | \varkappa) | x' \in X'\} \subseteq \{(x'_\varkappa \varkappa | \varkappa) | x'_\varkappa \in X' \textit{ für alle } \varkappa\} = \times_\varkappa \{x' \varkappa | x' \in X'\} = \times_\varkappa (\varkappa^\circ \sim X')$, aber nicht mehr $X' \subseteq \times_\varkappa A'_\varkappa$, sobald ein $A'_\varkappa$ das zugehörige $\varkappa^\circ \sim X'$ nicht mehr enthält. Daher heißt $X' \subseteq \times_\varkappa A_\varkappa$ *Subprodukt* der $A_\varkappa$, wenn $\varkappa^\circ \sim X' = A_\varkappa$ für alle $\varkappa \in K$ gilt.

Ihrer besonderen Bedeutung wegen (vgl. 1.3!) belegen wir die Teilmengen R eines Produktes $A \times B$ *zweier* Mengen A und B mit einem besonderen Namen: *Relationen*. Die Formulierung der Aussage $(a, b) \in R$ für ein $R \subseteq A \times B$ durch den Satz „der (unabhängigen) Variablen a wird durch R die (abhängige) Variable b zugeordnet" legt die Definition der Menge

(1.2.4) $$R A' = \{b | (a, b) \in R \quad \textit{für ein} \quad a \in A'\}$$

aller einem $a \in A'$ durch R zugeordneten $b \in B$ nahe.

Mitunter ist es angenehm, die für $A' \subseteq A$ und für $(A_\varkappa | \varkappa)$ mit $\times_\varkappa A_\varkappa \subseteq A$ durch

(1.2.5) $$R^\alpha A' = R A' \quad \textit{und} \quad R^\alpha_{\varkappa \in K} A_\varkappa = R(\times_\varkappa A_\varkappa)$$

definierte Abbildung R^α zur Hand zu haben. Die Vereinfachungen

(1.2.6) $$R\{a\} = R a \quad \textit{und} \quad b R a \quad \textit{statt} \quad b \in R a$$

[d.i. also $(a, b) \in R$] ermöglichen es, die logische Konjunktion der Aussagen $c S b$ für $S \subseteq B \times C$ und $b R a$ durch $c S b R a$ zu notieren.

Die Interpretation einer Relation als Zuordnung führt weiter noch zur Definition der *Inversen*

(1.2.7) $$R^- = \{(b, a) | (a, b) \in R\}$$

in $B \times A$ von $R \subseteq A \times B$ und der *Komposition*

(1.2.8) $$\begin{cases} S \circ R = \{(a, c) | c S b R a \quad \textit{für ein} \quad b \in B\} \\ \qquad = \{(a, c) | c \in S(R a)\} \end{cases}$$

in $A \times C$ von $R \subseteq A \times B$ und $S \subseteq B \times C$.

[2]) Oft kann $f^\sim$ auch wieder durch f ersetzt werden, es kann aber auch $f X \neq f^\sim X$ definiert sein.

Die Relationen in A^2 nennen wir die Relationen *über* A. Ausgezeichnet unter ihnen sind A^2 selbst und die *Identität*

$$I_A = \{(a, a) \mid a \in A\} = I. \tag{1.2.9}$$

1.3. Graphen und Äquivalenzen. Die weitaus wichtigste Relation ist der Graph (vgl. etwa JACOBSON [1]) einer Abbildung f aus A (heraus) in B (hinein), d.i. die Relation

$$f^\sim = \{(a, fa) \mid a \in A\}, \tag{1.3.1}$$

für die also $b\, f^\sim\, a$ gleichwertig ist mit $b = f\, a$. Ersichtlich gilt $f^\sim \circ f^{\sim -} = I_{f^\sim A} \subseteq I_B$. Gilt $R \circ R^- \subseteq I_B$ für ein $R \subseteq A \times B$, dann heißt R ein *Graph* in $A \times B$. $\{b', b''\} \subseteq R\, a$, d.h. $b'' R\, a\, R^-\, b'$, impliziert dann $b''\, I_B\, b'$, d.h. $b' = b''$. Daher existiert, wenn R ein Graph ist, $(R\, a)^\bullet$ für alle a mit $R\, a \neq \varnothing$, und es kann

$$R^\sim = \big((R\, a)^\bullet \mid a\big) \tag{1.3.2}$$

definiert werden. Dann gilt $R^{\sim\sim} = \{(a, (R a)^\bullet) \mid a\} = \{(a, b) \mid b\, R\, a\} = R$ und $f^{\sim\sim} = \big((f^\sim a)^\bullet \mid a\big) = (f\, a \mid a)$, d.h. die Graphen in $A \times B$ entsprechen eineindeutig den Abbildungen aus A in B[3]).

Weiter wird für zwei Abbildungen f und g, für die $g(f\, a)$ für alle a existiert, die *Komposition*

$$g \circ f = (g^\sim \circ f^\sim)^\sim = \big(g(f\, a) \mid a\big) \tag{1.3.3}$$

[beachte $\big(((g^\sim \circ f^\sim)\, a)^\bullet \mid a\big) = (\{c \mid c\, g^\sim\, b\, f^\sim\, a \text{ für ein } b\}^\bullet \mid a)$!] definiert, so daß $(g \circ f)\, a = g(f\, a)$ gilt. Und wenn für eine Abbildung f von A und alle $b \in f^\sim A$ der Term $(f^{\sim -} b)^\bullet = \{a \mid b\, f^\sim\, a\}^\bullet = \{a \mid b = f\, a\}^\bullet$ existiert, ist noch die *inverse* Abbildung

$$f^- = f^{\sim -\sim} = (\{a \mid b = f\, a\}^\bullet \mid b) \tag{1.3.4}$$

[beachte $f^{\sim -\sim} = \big((f^{\sim -} b)^\bullet \mid b\big)$!] zu definieren, so daß $f^-\, b = \{a \mid b = f\, a\}^\bullet$ [4]).

An dieser Stelle seien auch noch die zu f gehörigen Abbildungen

$$f^\in = f^{\sim \alpha} \quad \text{und} \quad f^\ni = f^{\sim -\alpha} \tag{1.3.5}$$

erwähnt, die die Teilmengen $A' \subseteq A$ in Teilmengen $B' \subseteq B$ und umgekehrt die B' in die A' überführen. Für eine Menge $\mathfrak{B}$ von Bildmengen B' wird also z.B. $f^{\ni\in}\, \mathfrak{B} = f^{\ni \sim}\, \mathfrak{B} = \{f^\ni B' \mid B' \in \mathfrak{B}\} = \{f^{\sim -} B' \mid B' \in \mathfrak{B}\} = \{\{a \mid f\, a \in B'\} \mid B' \in \mathfrak{B}\}$, d.i. die Menge der Urbildmengen aller $B' \in \mathfrak{B}$ bei der Abbildung f.

[3]) Mitunter werden Abbildungen von vorneherein als Graphen definiert. Dann muß man aber den Begriff des (geordneten) Paares voranstellen, und dieses ist im Grunde eine Abbildung, denn es besteht aus einem ersten, also der 1 zugeordneten, und einem zweiten, also der 2 zugeordneten Element. Es gibt auch keinen Grund, die Paare gemäß der Regel 2a in Anm. 1 durch „$(a, b) = (a', b')$, genau wenn $a = a'$ und $b = b'$ gilt", zu definieren, ohne die Regel 2b in der Form „$(a, b)\, 1 = a$ und $(a, b)\, 2 = b$" sogleich hinzuzunehmen, die die Paare zu vollwertigen Abbildungen macht.

[4]) Oft wird $g \circ f = g \cdot f$ und $f^- = f^{-1}$ gesetzt. Sind aber z.B. $g\, a$ und $f\, a$ stets Elemente einer multiplikativen Gruppe, dann kann auch $g \cdot f = (g\, a \cdot f\, a \mid a)$ und $f^{-1} = ((f\, a)^{-1} \mid a)$ vereinbart werden. Die Notation $g \circ f = g\, f$ ist auch nicht statthaft, weil es vorkommen kann, daß der Definitionsbereich von g sowohl $\{f\}$ als auch $f^\sim A$ umfaßt.

Außer ihrem Graphen definiert eine Abbildung f von A auch noch eine andere wichtige Relation, nämlich ihre Äquivalenz

(1.3.6) $$f^{=} = f^{\sim -} \circ f^{\sim} = \{(a', a'') \mid f\,a' = f\,a''\}$$

(beachte, daß die Existenz eines b mit $a''\ f^{\sim}\ b\ f^{\sim}\ a'$ genau $f\,a' = f\,a''$ bedeutet) die sich also relationstheoretisch leicht aus dem Graphen gewinnen läßt. $E = f^{=}$ ist reflexiv, symmetrisch und transitiv, d.h. es gilt $I \subseteq E$, $E^{-} \subseteq E$, und $E \circ E \subseteq E$ oder damit gleichbedeutend

(1.3.7) $$E^{-} \circ E \subseteq E \supseteq I\ ^{5}).$$

Eine Relation E über A mit diesen Eigenschaften heißt eine *Äquivalenz* über A. Die Aussagen

(1.3.8) $$a''\,E\,a', \qquad E\,a' = E\,a'', \qquad E\,a' \cap E\,a'' \neq \varnothing$$

sind dann untereinander gleichwertig[6]). Daher liefern die $E\,a$ mit $a \in A$ eine Klasseneinteilung von A, und $E\,a$ ist die a enthaltende *E-Klasse*.

Die Bildmenge

(1.3.9) $$A'/E = (E\,a \mid a)^{\sim} A' = \{E\,a \mid a \in A'\}$$

von $A' \subseteq A$ bei der Abbildung $(E\,a \mid a)$ heißt der *Quotient* von A' modulo E. Für die *kanonische* Abbildung $f = (E\,a \mid a)$ von A auf A/E gilt $f^{-} = \{(a', a'') \mid E\,a' = E\,a''\} = \{(a', a'') \mid a''\,E\,a'\} = E$, d.h. jede Äquivalenz E über A wird durch eine Abbildung von A definiert, nämlich durch die kanonische Abbildung modulo E.

§ 2. Die algebraischen Grundbegriffe.

2.1. Algebren und ihre Produkte. Zu den allgemeinen Grundbegriffen aus § 1 tritt jetzt der Operatorbegriff. *Operator auf* einer Menge A nennen wir jede Abbildung ω, deren Definitionsbereich nur aus Abbildungen einer Menge I_ω besteht und $A^{I\omega}$ umfaßt, und für die [(1.2.5)!]

(2.1.1) $$\omega^{\sim} A^{I\omega} = \omega^{\in}_{\iota \in I_\omega} A \subseteq A$$

gilt. Ist Ω eine Menge von Operatoren auf A, dann heiße A bezüglich Ω *zulässig*, kurz *Ω-zulässig*, oder eine *Ω-Menge*. Wir werden auch sagen, A besitze eine *algebraische Struktur*, nämlich eine *Ω-Struktur*, und sei eine *Algebra*. (Vgl. hierzu sowohl Birkhoff [1] als auch Schmidt [1].) Einen Strukturbegriff benötigen wir nicht.

---

[5]) Weil die Inversion eine isotone Involution ist, d.h. weil $R^{--} = R$ gilt und $R^{-} \subseteq R'^{-}$, wenn $R \subseteq R'$ gilt, folgt aus $E^{-} \subseteq E$ sogar $E^{-} = E$. Und wegen $R \circ I_A = R = I_A \circ R$ für $R \subseteq A^2$ und der Isotonie der Komposition, also weil $S \circ R \subseteq S' \circ R'$, wenn $S \subseteq S'$ und $R \subseteq R'$, folgt aus $E^{-} \circ E \subseteq E \supseteq I$: $E^{-} = E^{-} \circ I \subseteq E^{-} \circ E \subseteq E$ und damit auch $E^{-} = E$.

[6]) $a''\,E\,a'$ impliziert $E\,a' = E\,a''$, weil aus $a \in E\,a''$ sofort $a\,E\,a''\,E\,a'$, also $a \in (E \circ E)\,a' = E\,a'$ folgt. $E\,a' = E\,a''$ impliziert trivial $E\,a' \cap E\,a'' \neq \varnothing$, und $a \in E\,a' \cap E\,a''$ impliziert $a''\,E^{-}\,a\,E\,a'$, also $a''(E^{-} \circ E)\,a'$, d.h. $a''\,E\,a'$.

Eine *Unteralgebra* U von A ist natürlich eine Ω-Teilmenge von A. Ersichtlich gilt dann:

(2.1.2) *Die Unteralgebren U einer Algebra A bilden einen vollständigen Verband bezüglich der Ordnung „$\subseteq$" mit* $\inf_{U\in\mathfrak{U}} U = \bigcap_{U\in\mathfrak{U}} U$ *für jede Menge* $\mathfrak{U}$ *von Unteralgebren U von A.*

Es seien Ω und Ω' Operatorenmengen auf A, und $A' \supseteq A$ sei eine Ω'-Menge. Wir definieren dann: 1. Ω' ist *bezüglich A reicher* als Ω, wenn zu jedem $\omega\in\Omega$ ein $\omega'\in\Omega'$ existiert, das auf A^{I_ω} die gleiche Funktion induziert wie ω, so daß also $\omega\, x = \omega' x$ für alle $x\in A^{I_\omega}$ gilt. 2. Ω' und Ω sind *äquivalent bezüglich A*, wenn jede von beiden Operatorenmengen bezüglich A reicher ist als die andere. 3. Ω' ist eine *Fortsetzung bezüglich A* von Ω auf A' hin, wenn Ω und Ω' bezüglich A äquivalent sind.

Immer wenn wir nun im folgenden bezüglich A die $\omega\in\Omega$ auf irgendeine Weise zu Operatoren $\omega'\in\Omega'$ auf einem $A'\supseteq A$ fortsetzen, werden wir anschließend sofort die Bezeichnungen ändern und ω hinfort als Variable für die Fortsetzungen verwenden. Statt dessen können wir aber auch sagen, die ω seien von vornherein in der gewünschten Weise als Operatoren auf A' definiert.

Die folgende Definition der Produktalgebren ist ein Beispiel für dieses bequeme Vorgehen, bei dem nur zu beachten ist, daß man erst nach dem letzten Fortsetzungsprozeß die Definitionsbereiche der Operatoren kennt. *Vorher* darf man also eine „wohldefinierte" Abbildung f nie als Operator verwenden, sondern kann nur von einem Operator sprechen, der auf dem Definitionsbereich von f gerade die Abbildung f induziert. Insbesondere gilt dies für die partiellen Abbildungen $f = \omega_{\iota'\in I'}\, a_{\iota'}$ $(I' < I_\omega)$, die ein Operator ω auf $\times_{\iota''\notin I'} A$ induziert [vgl. (2.4.6) und (5.1.7)!].

Auf dem Produkt $X = \times_{\varkappa\in K} A_\varkappa$ der Ω-Mengen $A_\varkappa$ sei $\omega\in\Omega$ definiert durch

$$\omega_{\iota\in I_\omega}\, x_\iota = \big(\omega_\iota(x_\iota\varkappa)\,\big|\,\varkappa\in K\big), \qquad (x_\iota\in\times_\varkappa A_\varkappa). \tag{2.1.3}$$

Die so definierte Ω-Menge X heiße das *Produkt der Algebren* $A_\varkappa$. Entsprechend werden wir unter einem *Subprodukt der Algebren* $A_\varkappa$ eine Unteralgebra des Produktes dieser Algebren verstehen, die ein Subprodukt der Mengen $A_\varkappa$ ist.

2.2. Zulässige Relationen, Kongruenzen. Nach (2.1.3) ist mit A und B auch $A\times B$ eine Ω-Menge so, daß $\omega_\iota(a_\iota, b_\iota) = (\omega_\iota a_\iota, \omega_\iota b_\iota)$ für alle $(a_\iota, b_\iota)\in A\times B$, $\iota\in I_\omega$, $\omega\in\Omega$. Daher sind die Ω-Relationen, also die Unteralgebren R von $A\times B$, dadurch charakterisiert, daß für alle $\omega\in\Omega$ stets $(\omega_\iota b_\iota)\, R\,(\omega_\iota a_\iota)$ folgt, wenn $b_\iota R\, a_\iota$ für alle $\iota\in I_\omega$ gilt. Damit ergibt sich mühelos:

(2.2.1) *Mit $R\subseteq A\times B$ und $S\subseteq B\times C$ sind auch $R^-\subseteq B\times A$ und $S\circ R\subseteq A\times C$ zulässig. Und Identitäten über Algebren sind stets zulässig.*

Eine zulässige Äquivalenz E über einer Algebra A heißt *Kongruenz*. Nennen wir zwei Relationen R' und R'' *miteinander vertauschbar*, wenn $R''\circ R' = R'\circ R''$ gilt, dann ergibt sich:

(2.2.2) *Die Kongruenzen über einer Algebra bilden einen vollständigen Verband bezüglich der Ordnung „$\subseteq$" mit* $\inf_{E\in\mathfrak{E}} E = \bigcap_{E\in\mathfrak{E}} E$ *für jede Menge* $\mathfrak{E}$ *von*

Kongruenzen E.

(2.2.3) $$E' \cup E'' \subseteq E' \circ E'' \subseteq \bigcap_{E \supseteq E' \cup E''} E.$$

(2.2.4) *$E' \circ E''$ ist genau dann die kleinste E' und E'' enthaltende Kongruenz, wenn E' und E'' miteinander vertauschbar sind.*

Beweise. (2.2.2) folgt aus (2.1.2) und $(\bigcap_\varkappa E_\varkappa)^- \circ (\bigcap_\varkappa E_\varkappa) = (\bigcap_\varkappa E_\varkappa^-) \circ (\bigcap_\varkappa E_\varkappa) \subseteq \bigcap_\varkappa (E_\varkappa^- \circ E_\varkappa) \subseteq \bigcap_\varkappa E_\varkappa \supseteq I$ gemäß (1.3.7). $I \subseteq E' \cap E''$ und die Isotonie der Komposition liefern (2.2.3). Aus $E' \circ E'' = E'' \circ E'$ folgt $(E' \circ E'')^- \circ (E' \circ E'') = E''^- \circ E'^- \circ E' \circ E'' \subseteq E'' \circ E' \circ E'' \subseteq E' \circ E'' \supseteq I \circ I = I$, so daß $E' \circ E''$ nach (1.3.7) und (2.2.1) eine Kongruenz ist. Umgekehrt gilt für eine Äquivalenz $E' \circ E'' : E' \circ E'' = (E' \circ E'')^- = E''^- \circ E'^- = E'' \circ E'$. Damit folgt (2.2.4) aus (2.2.3).

2.3. Homomorphismen. Eine Abbildung f einer Ω-Menge A in eine Ω-Menge B heiße *Ω-zulässig* oder ein *Homomorphismus*, wenn ihr Graph Ω-zulässig ist, d.h. wenn mit $b_\iota f^\sim a_\iota$ für alle ι stets auch $(\omega_\iota b_\iota) f^\sim (\omega_\iota a_\iota)$, also

(2.3.1) $$\omega_\iota (f a_\iota) = f(\omega_\iota a_\iota)$$

gilt, so daß $f^\sim A$ trivial eine Unteralgebra von B wird. Ein umkehrbarer Homomorphismus heißt *Isomorphismus*. Seine Umkehrung f^- ist wieder ein Homomorphismus, weil mit $f^\sim$ nach (2.2.1) auch $f^{\sim -} = f^{-\sim}$ zulässig ist. Ebenso ist nach (2.2.1) wegen $g^\sim \circ f^\sim = (g \circ f)^\sim$ mit g und f auch $g \circ f$ ein Homomorphismus.

Die Äquivalenz $f^= = f^{\sim -} \circ f^\sim$ eines Homomorphismus f ist nach (2.2.1) stets eine Kongruenz. Ist umgekehrt die Äquivalenz einer Abbildung f von A zulässig, gilt also für alle $\omega \in \Omega$ stets $f(\omega_\iota a_\iota') = f(\omega_\iota a_\iota'')$, wenn $f a_\iota' = f a_\iota''$ für alle $\iota \in I_\omega$ gilt, dann wird, weil $f(\omega_\iota a_\iota)$ nur von ω und den $f a_\iota$ abhängt, durch (2.3.1) in $f^\sim A$ eine Ω-Struktur *induziert. Ein Homomorphismus ist also genau eine solche Abbildung mit zulässiger Äquivalenz, die in ihrer Bildmenge gerade die dort vorliegende algebraische Struktur induziert.*

Eine Abbildung f von A wollen wir jetzt stets gemäß

(2.3.2) $$f(a', a'') = f \circ (a', a'') = (f a', f a'')$$

auf A^2 fortsetzen[7]). Nach dieser Vereinbarung formulieren wir:

(2.3.3) *Für $f \in B^A$, $R \subseteq A^2$, und $S \subseteq B^2$ gilt:*

$$f^\sim R = f^\sim \circ R \circ f^{\sim -} \quad \text{und} \quad f^{\sim -} S = f^{\sim -} \circ S \circ f^\sim.$$

(2.3.4) *Für $f \in B^A$, $R_1 \cup R_2 \subseteq A^2$ und $S_1 \cup S_2 \subseteq B^2$ gilt:*

$f^\sim (R_2 \circ R_1) = f^\sim R_2 \circ f^\sim R_1$, *wenn* $f^= \circ R_i = R_i \circ f^=$ *für ein* $i = 1, 2$, *und*

$f^{\sim -} (S_2 \circ S_1) = f^{\sim -} S_2 \circ f^{\sim -} S_1$, *wenn* $S_i \subseteq f^\sim A$ *für ein* $i = 1, 2$.

(2.3.5) *Ist R eine Äquivalenz über A und mit dem $f^=$ eines $f \in B^A$ vertauschbar, dann ist $f^\sim R$ eine Äquivalenz über $f^\sim A$.*

[7]) Macht man, wie es bei $A \cap A^1 = \emptyset$ meist geschieht, zwischen den Abbildungen f von A und denen von A^1 keinen Unterschied, indem man stets $f a = f(a|_\varkappa \varkappa = 1)$ definiert (vgl. Anm. 1!), dann ist (2.3.2) für $f^\sim A \subseteq A$ im Einklang mit (2.1.3).

Ist S eine Äquivalenz über B, dann ist $f^{\sim -} S$ eine Äquivalenz über A, die $f^{=}$ enthält und daher mit $f^{=}$ vertauschbar ist.

Beweise. $(b', b'') = f(a', a'')$ mit $a'' R a'$ bzw. mit $b'' S b'$ bedeutet $b'' f^{\sim} a'' R a' f^{\sim -} b'$ bzw. $a'' f^{\sim -} b'' S b' f^{\sim} a'$. Damit ist (2.3.3) bewiesen, und (2.3.4) und (2.3.5) lassen sich jetzt leicht nachrechnen. Man hat dabei nur zu beachten, daß $f^{\sim} \circ f^{=} = I_{f^{\sim} A} \circ f^{\sim} = f^{\sim}$ (und damit auch die invertierte Gleichung $f^{=} \circ f^{\sim -} = f^{\sim -}$) gilt sowie $f^{=} \leqq f^{\sim -} \circ S \circ f^{\sim}$ für $I_{f^{\sim} A} \leqq S$.

In Verbindung mit (2.2.1) beantworten (2.3.3), (2.3.4) und (2.3.5) die Frage nach dem Verhalten der Zulässigkeit, der Vertauschbarkeit und der Äquivalenzeigenschaft von Relationen bei Homomorphismen.

2.4. Quotienten von Algebren und Relationen. Ist E eine Kongruenz über der Algebra A, dann induziert die kanonische Abbildung $(E\, a \mid a)$, deren Äquivalenz nach 1.3 gerade E, also zulässig ist, gemäß (2.3.1) in A/E eine Ω-Struktur so, daß

$$\omega_\iota (E\, a_\iota) = E\, (\omega_\iota\, a_\iota). \tag{2.4.1}$$

Mit dieser algebraischen Struktur versehen, heiße A/E der *Quotient der Algebra A modulo E*. Entsprechend heißt das Bild

$$R/E = (E\, a \mid a)^{\sim} R = \{(E\, a', E\, a'') \mid a'' R\, a'\} \tag{2.4.2}$$

einer Relation R über A der *Quotient der Relation R modulo E*. Wir heben hervor:

Für eine Kongruenz E und eine Relation R über einer Algebra A gilt:

(2.4.3) $(E\, a'')\, (R/E)\, (E\, a')$, *genau wenn* $a''(E \circ R \circ E)\, a'$ *gilt.*

(2.4.4) $(R \circ E)/E' = R/E' = (E \circ R)/E'$, *wenn* $E \leqq E'$ *gilt.*

(2.4.5) $\omega_\iota^{\in}(E\, a_\iota) \leqq \omega_\iota (E\, a_\iota)$ *für alle* $\omega \in \Omega$ $\big((1.2.5)!\big)$.

(2.4.6) $\omega'_{\iota''} (E\, a_{\iota''}) = \big(\omega_{\iota'} (E\, a_{\iota'})\big)_{\iota''} (E\, a_{\iota''})$, *wenn* $\omega'_{\iota''}\, a_{\iota''} = (\omega_{\iota'}\, a_{\cdot})_{\iota''}\, a_{\iota''}$,

wo natürlich $\{\omega, \omega'\} \leqq \Omega$ und $I_{\omega'} \ni \iota''$ zu $I' \ni \iota'$ in I_ω komplementär sein muß[8].

Beweise. Nach (2.3.3) ist $f^{=} \circ R \circ f^{=}$ die größte Relation, die f auf $f^{\sim} R$ abbildet. Für $f = (E\, a \mid a)$ folgt damit wegen $f^{=} = E$ (2.4.3). Da $E \leqq E'$ gleichbedeutend ist mit $E \circ E' = E' = E' \circ E$, gilt $E' \circ R \circ E \circ E' = E' \circ R \circ E' = E' \circ E \circ R \circ E'$, und somit folgt nach (2.4.3) modulo E' (2.4.4). Gilt $a'_\iota \in E\, a_\iota$, also $E\, a'_\iota = E\, a_\iota$, für alle ι, dann wird $\omega_\iota\, a'_\iota \in E(\omega_\iota\, a'_\iota) = \omega_\iota (E\, a'_\iota) = \omega_\iota (E\, a_\iota)$, also gilt (2.4.5). (2.4.6) folgt durch einfaches Rechnen: $\omega'_{\iota''} (E\, a_{\iota''}) = E(\omega'_{\iota''}\, a_{\iota''}) = E\, (\omega_{\iota \in I_\omega}\, a_\iota) = \omega_\iota (E\, a_\iota)$.

§ 3. Die Kongruenztopologien.

Wir entwickeln jetzt die topologischen Hilfsmittel. Dabei halten wir uns streng an die Terminologie von BOURBAKI [1]. Immer wenn ein BOURBAKIscher

[8]) Zum Beispiel ist also die Fortsetzung der Multiplikation mit einem Element a eines Ringes A auf A/E die gleichseitige Multiplikation mit $E\, a$. Man darf daher oft $a \cdot E\, a' = E(a \cdot a')$ setzen.

Begriff zum ersten Male im Text auftritt, fügen wir der hier gewählten Übersetzung den französischen Ausdruck hinzu.

3.1. $\mathfrak{L}$-Produkte und $\mathfrak{L}$-Schnitte von Filterbasen. Über der Menge der Teilmengen von A definieren wir die *Größer-oder-gleich-Relation*

$$\geqq_A = \{(A', A'') \mid A' \subseteq A'' \subseteq A\} = \geqq \tag{3.1.1}$$

und haben dann nach (1.2.4) für den von einer *Filterbasis* (*base d'un filtre*) $\mathfrak{F}$ in A erzeugten *Filter* (*filtre*) die Bezeichnung

$$\geqq_A \mathfrak{F} = \{A' \mid F \subseteq A' \subseteq A \quad \text{für ein} \quad F \in \mathfrak{F}\} = \geqq \mathfrak{F}.$$

Eine Menge $\mathfrak{L}$ von Teilmengen Λ von K nennen wir eine *Aufbaumenge* von K, wenn sie mit Λ' und Λ'' stets auch ein $\Lambda \geqq \Lambda' \cup \Lambda''$ enthält (wenn sie also ein ensemble filtrant ist) und wenn sie K überdeckt, wenn also $\bigcup_{\Lambda \in \mathfrak{L}} \Lambda = K$ gilt. Man beachte, daß mit K auch $\mathfrak{L}$ endlich ist und dann $\bigcup_\Lambda \Lambda = K$ enthält.

Nun sei $\mathfrak{F}_\varkappa$ für jedes $\varkappa \in K$ eine Filterbasis in $A_\varkappa$. Als $\mathfrak{L}$-Produkt der $\mathfrak{F}_\varkappa$ definieren wir dann

$$\times_{\mathfrak{L}, \varkappa \in K} \mathfrak{F}_\varkappa = \left\{ \times_{\varkappa \in K} F_\varkappa \;\middle|\; \text{es gibt } \Lambda \in \mathfrak{L} \text{ mit } F_\lambda \in \mathfrak{F}_\lambda \text{ für alle } \lambda \in \Lambda \text{ und } F_\varkappa = A_\varkappa \text{ für alle } \varkappa \notin \Lambda \right\}. \tag{3.1.2}$$

Wie leicht zu sehen, ist es wegen $\times_\varkappa F'_\varkappa \cap \times_\varkappa F''_\varkappa = \times_\varkappa (F'_\varkappa \cap F''_\varkappa)$ und der Aufbaueigenschaft von $\mathfrak{L}$ eine Filterbasis in $\times_\varkappa A_\varkappa$. Besteht $\mathfrak{L}$ genau aus allen endlichen Teilmengen von K, dann erzeugt das $\mathfrak{L}$-Produkt der $\mathfrak{F}_\varkappa$ ersichtlich das übliche *Filterprodukt* (*produit de filtres*) der $\geqq \mathfrak{F}_\varkappa$.

Sind jetzt die $A_\varkappa$ sämtlich gleich A, dann definieren wir

$$\cap_{\mathfrak{L}, \varkappa \in K} \mathfrak{F}_\varkappa = \{\cap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \mid \Lambda \in \mathfrak{L}, \quad F_\lambda \in \mathfrak{F}_\lambda \quad \text{für alle} \quad \lambda \in \Lambda\} \tag{3.1.3}$$

als den $\mathfrak{L}$-*Schnitt* der $\mathfrak{F}_\varkappa$. Ersichtlich ist er wegen der Aufbaueigenschaft von $\mathfrak{L}$ wieder eine Filterbasis in A, wenn er die leere Menge nicht enthält, trivial also, wenn

$$\cap_{\varkappa \in K} \cap_{F_\varkappa \in \mathfrak{F}_\varkappa} F_\varkappa = \cap_{F \in \cap_{\mathfrak{L}, \varkappa \in K} \mathfrak{F}_\varkappa} F \tag{3.1.4}$$

nicht leer ist. Der $\mathfrak{L}$-Schnitt ist stets *feiner* (*plus fin*) als seine Komponenten und hat nichts mit dem *Durchschnitt* $\cap_\varkappa \geqq \mathfrak{F}_\varkappa$ (*filtre intersection*) zu tun, der die untere Grenze (*borne inférieure*) seiner Komponenten ist.

Es sei jetzt $\varkappa^\circ$ die $\varkappa$-Projektion von $X = \times_\varkappa A_\varkappa$ auf $A_\varkappa$. Mit

$$\begin{cases} F_\varkappa^\ni = \varkappa^{\circ \ni} F_\varkappa = \{x \mid x\varkappa \in F_\varkappa\} & \text{und} \\ \mathfrak{F}_\varkappa^\ni = \varkappa^{\circ \ni \in} \mathfrak{F}_\varkappa = \{F_\varkappa^\ni \mid F_\varkappa \in \mathfrak{F}_\varkappa\} \end{cases} \tag{3.1.5}$$

ergibt sich

$$\times_{\varkappa \in K} F_\varkappa = \{x \mid x\lambda \in F_\lambda \text{ für alle } \lambda \in \Lambda\} = \cap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda^\ni, \text{ wenn } F_\varkappa = A_\varkappa \text{ für alle } \varkappa \notin \Lambda, \tag{3.1.6}$$

so daß

$$\times_{\mathfrak{L}, \varkappa \in K} \mathfrak{F}_\varkappa = \cap_{\mathfrak{L}, \varkappa \in K} \mathfrak{F}_\varkappa^\ni.$$

3.2. Kongruenzstrukturen. Besonders einfach sind diejenigen *gleichmäßigen Strukturen (structures uniformes)*, deren *Nachbarschaftsfilter (filtres*

d'entourages) durch eine Menge von Äquivalenzen erzeugt werden. Denn jeder von Äquivalenzen erzeugte Filter besitzt nach (2.2.2) eine nur aus Äquivalenzen bestehende Basis und ist also trivial ein Nachbarschaftsfilter.

Unter einer *Kongruenzstruktur* in einer Algebra A verstehen wir nun eine gleichmäßige Struktur in A, deren Nachbarschaftsfilter durch Kongruenzen erzeugt wird, der also nach (2.2.2) eine nur aus Kongruenzen T über A bestehende Basis $\mathfrak{T}$ besitzt. Wir nennen $\mathfrak{T}$ dann eine *zulässige Äquivalenz-* oder *Kongruenzbasis*. Die durch $\mathfrak{T}$ definierte Kongruenzstruktur in A heiße $\mathfrak{T}$-*Struktur* und A selbst eine $\mathfrak{T}$-*Algebra* bzw. $\mathfrak{T}$-Ω-*Menge*. Für $\mathfrak{T} = \{I\}$ liegt dann eine gewöhnliche Algebra mit der diskreten (discrète) gleichmäßigen Struktur vor und für $\Omega = \{(a|a)\}$ eine Menge mit Kongruenzstruktur, aber ohne algebraische Struktur.

Sind zwei Algebren A und B isomorph aufeinander bezogen, und zwar durch ein und dieselbe Abbildung f sowohl algebraisch als auch im Sinne der gleichmäßigen Strukturen *(isomorphisme de la structure uniforme de A sur celle de B)*, dann sagen wir A und B seien *simultanisomorph* zueinander und nennen f einen *Simultanisomorphismus*.

Die durch eine Kongruenzbasis $\mathfrak{T}$ in A *eingeführte gleichmäßige Topologie (topologie déduite d'une structure uniforme)* nennen wir eine *Kongruenztopologie* oder genauer $\mathfrak{T}$-*Topologie*. Bei dieser ist

$$\mathfrak{T}\,a = \{T\,a \mid T \in \mathfrak{T}\} \tag{3.2.1}$$

eine *Umgebungsfilterbasis (base d'un filtre de voisinages)* von $a \in A$.

Im folgenden werden wir in erster Linie mit *separablen* gleichmäßigen Strukturen *(structures uniformes séparées)* zu tun haben und dementsprechend (BOURBAKI [1], Chap. II, § 2, Prop. 1) mit *separablen* Räumen *(espaces séparés)*, in denen also je zwei verschiedene Punkte im Sinne des HAUSDORFFschen Trennungsaxioms getrennt werden können, also separabel sind. Mit anderen Worten, wir betrachten hauptsächlich *separable Kongruenzbasen* $\mathfrak{T}$, für die also $\bigcap_{T \in \mathfrak{T}} T = I$ gilt. Da die $T\,a$ mit $a \in A$ für jedes $T \in \mathfrak{T}$ die Klassen einer Klasseneinteilung von A sind, erweisen sie sich sofort als zugleich offen und abgeschlossen, also sind separable kongruenztopologische Räume stets *total unzusammenhängend (totalement discontinue)* und *regulär (régulier)*.

Statt „CAUCHY-*Filterbasis (base d'un filtre de Cauchy)* bezüglich der $\mathfrak{T}$-Topologie" werden wir kurz „$\mathfrak{T}$-*Filterbasis*" sagen, d.i. also eine Filterbasis, die zu jedem $T \in \mathfrak{T}$ ein F mit $F^2 \leq T$ enthält. Ein $\mathfrak{T}$-*Filter* ist dann natürlich ein Filter, der eine $\mathfrak{T}$-Filterbasis enthält.

(3.2.2) *Eine Filterbasis $\mathfrak{F}$ ist eine $\mathfrak{T} = \{T_\varrho \mid \varrho \in P\}$-Filterbasis in A, genau wenn $\geq_A \mathfrak{F}$ zu jedem $\varrho \in P$ eine T_ϱ-Klasse enthält.*

(3.2.3) *Die Menge $\{T_\varrho\, a_\varrho \mid \varrho \in P\}$ ist eine Filterbasis, genau wenn ein Filter sie enthält.*

(3.2.4) *Die Menge $\{T_\varrho\, a_\varrho \mid \varrho \in P\}$ ist eine gegen a konvergierende (konvergent) Filterbasis, genau wenn $a \in \bigcap_{\varrho \in P} T_\varrho\, a_\varrho$ gilt.*

(3.2.5) *A ist bezüglich $\mathfrak{T} = \{T_\varrho | \varrho \in P\}$ vollständig (complet), d.h. jede $\mathfrak{T}$-Filterbasis in A konvergiert in A, genau wenn jede Filterbasis der Gestalt $\{T_\varrho a_\varrho | \varrho \in P\}$ einen nicht leeren Durchschnitt $\bigcap_{\varrho \in P} T_\varrho a_\varrho$ besitzt.*

Beweise. $a \in F$ mit $F^2 \subseteq T$ impliziert $F = F^2\, a \subseteq T a$, und $(a', a'') \in (T a)^2$ impliziert $a'' T a T^{-} a'$ und damit $a'' T a'$. Also gilt (3.2.2). Ist $\{T_\varrho a_\varrho | \varrho\}$ in einem Filter enthalten, dann existieren $a' \in T_\varrho a_\varrho \cap T_{\varrho'} a_{\varrho'}$ und $a'' \in T_\varrho a_\varrho \cap T_{\varrho''} a_{\varrho''}$ für beliebige $\varrho, \varrho', \varrho''$. Für $T_\varrho \subseteq T_{\varrho'} \cap T_{\varrho''}$ folgt dann mit (1.3.8) $T_\varrho a_\varrho = T_\varrho a' \subseteq T_{\varrho'} a' = T_{\varrho'} a_{\varrho'}$ und ebenso $T_\varrho a_\varrho \subseteq T_{\varrho''} a_{\varrho''}$. Daher ist $\{T_\varrho a_\varrho | \varrho\}$ eine Filterbasis und (3.2.3) bewiesen. $\mathfrak{T} a \supseteq \{T_\varrho a_\varrho | \varrho\}$ impliziert mit (1.3.8) $T_\varrho a = T_\varrho a_\varrho$ für alle ϱ, also $a \in \bigcap_\varrho T_\varrho a_\varrho$. Hieraus folgt wieder $T_\varrho a = T_\varrho a_\varrho$ und damit $\mathfrak{T} a = \{T_\varrho a_\varrho | \varrho\}$. (3.2.5) aber ist eine unmittelbare Folge von (3.2.2), (3.2.3) und (3.2.4).

3.3. Produkt-, Quotient- und Unterstrukturen. Es sei $A_\varkappa$ für jedes $\varkappa \in K$ eine $\mathfrak{T}_\varkappa$-Ω-Menge. Die $\varkappa$-Projektion $\varkappa^\varkappa$ des Algebrenproduktes $X = \times_\varkappa A_\varkappa$ auf $A_\varkappa$ ist nach (2.3.1) ein Homomorphismus, denn nach (2.1.3) gilt $(\omega_\iota x_\iota)\varkappa = \omega_\iota (x_\iota \varkappa)$. Daher sind ((2.3.2)!) die $T_\varkappa^\ni = \varkappa^\varkappa{}^\ni T_\varkappa = \varkappa^\varkappa{}^{\sim -} T_\varkappa$ für $T_\varkappa \in \mathfrak{T}_\varkappa$ nach (2.3.3) und (2.3.5) Kongruenzen über X, und somit bilden die *Urbilder (images reciproques)* $\mathfrak{T}_\varkappa^\ni = \varkappa^\varkappa{}^\ni \mathfrak{T}_\varkappa = \{T_\varkappa^\ni | T_\varkappa \in \mathfrak{T}_\varkappa\}$ der $\mathfrak{T}_\varkappa$ Kongruenzbasen über X. Schließlich ist dann auch jeder $\mathfrak{L}$-Schnitt der $\mathfrak{T}_\varkappa^\ni$ wegen (2.2.2) eine Kongruenzbasis über X, *und zwar wegen* (3.1.4) *eine separable, wenn die $\mathfrak{T}_\varkappa$ separabel sind.* Die durch diese in X definierte gleichmäßige Struktur bzw. Topologie nennen wir das $\mathfrak{L}$-*Produkt* der $\mathfrak{T}_\varkappa$-Strukturen bzw. $\mathfrak{T}_\varkappa$-Topologien in den $A_\varkappa$, denn es handelt sich, wie man nach Bourbaki [*1*], Chap. II, § 5, No 1—2, mühelos feststellt, um die gewöhnliche *Produktstruktur (structure uniforme produit)* bzw. *Produkttopologie (topologie produit)*, wenn $\mathfrak{L}$ genau aus allen endlichen Teilmengen von K besteht. Da jedes $T_\varkappa^\ni$ wegen $\bigcup_\lambda \Lambda = K$ ein $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} T_\lambda^\ni \in \bigcap_{\mathfrak{L}, \varkappa} \mathfrak{T}_\varkappa^\ni$ enthält, sieht man sofort, daß die $\mathfrak{L}$-Produkte im allgemeinen *feiner (plus fin)* sind als das gewöhnliche. Das mit dem $\mathfrak{L}$-Produkt der $\mathfrak{T}_\varkappa$-Strukturen und $\mathfrak{T}_\varkappa$-Topologien versehene X selbst nennen wir schließlich das $\mathfrak{L}$-*Produkt* der $\mathfrak{T}_\varkappa$-Algebren $A_\varkappa$.

Die Umgebungsfilterbasis eines Punktes $x \in X$ bezüglich der $\mathfrak{L}$-Produkttopologie läßt sich leicht (der üblichen Produktdefinition für Topologien entsprechend) als $\mathfrak{L}$-Produkt von Umgebungsfilterbasen schreiben:

(3.3.1) *$(\bigcap_{\mathfrak{L}, \varkappa \in K} \mathfrak{T}_\varkappa^\ni)\, x = \times_{\mathfrak{L}, \varkappa \in K} \mathfrak{T}_\varkappa(x\varkappa)$, wobei $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} T_\lambda^\ni x = \times_{\varkappa \in K} T_\varkappa(x\varkappa)$ wird, wenn man $T_\varkappa = A_\varkappa^2$ für alle $\varkappa \notin \Lambda$ setzt.*

(3.3.2) *Für $K = \{1, \ldots, k\}$, $A_1 = \cdots = A_k = A$ und $\mathfrak{T}_1 = \cdots = \mathfrak{T}_k = \mathfrak{T}$ wird* $\supseteq \times_{\mathfrak{L}, \varkappa = 1, \ldots, k} \mathfrak{T}(x\varkappa) = \supseteq \{\times_{\varkappa = 1, \ldots, k} T(x\varkappa) | T \in \mathfrak{T}\}$.

Beweise. Wegen $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} T_\lambda^\ni x = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \{x' | (x\lambda, x'\lambda) \in T_\lambda\} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (T_\lambda(x\lambda))^\ni$ wird gemäß (3.2.1) und (3.1.5) $(\bigcap_{\mathfrak{L}, \varkappa} \mathfrak{T}_\varkappa^\ni)\, x = \bigcap_{\mathfrak{L}, \varkappa} (\mathfrak{T}_\varkappa(x\varkappa))^\ni$. Damit folgt (3.3.1) aus (3.1.6)[9]. Die linke Basis in (3.3.2) enthält die rechte, und $\times_{\varkappa = 1, \ldots, k} T_\varkappa(x\varkappa)$ enthält $\times_{\varkappa = 1, \ldots, k} T(x\varkappa)$ für $T \subseteq \bigcap_{\varkappa = 1, \ldots, k} T_\varkappa$.

[9]) Zur Warnung: (3.1.6) setzt $\varkappa^\varkappa$ als $\varkappa$-Projektion von $X = \times_\varkappa A_\varkappa$ auf $A_\varkappa$ voraus, kann also auf $\bigcap_{\mathfrak{L}, \varkappa} \mathfrak{T}_\varkappa^\ni$ nur angewandt werden, wenn $\varkappa^\varkappa$ als $\varkappa$-Projektion von $\times_\varkappa A_\varkappa^2$ auf $A_\varkappa^2$ gedeutet wird. Dann wird aber $T_\varkappa^\ni = \varkappa^\varkappa{}^\ni T_\varkappa \subseteq \times_\varkappa A_\varkappa^2$ statt $T_\varkappa^\ni \subseteq (\times_\varkappa A_\varkappa)^2$.

Das Bild *(image directe)* $f^{\varepsilon\in}\mathfrak{T}=\{f^\sim T\,|\,T\in\mathfrak{T}\}=\{f^\sim\circ T\circ f^{\sim-}\,|\,T\in\mathfrak{T}\}$ einer Kongruenzbasis $\mathfrak{T}$ über einer Algebra A ist nach (2.3.3) und (2.3.5) eine Kongruenzbasis über $f^\sim A$, wenn f ein Homomorphismus von A und $f^=$ mit allen $T\in\mathfrak{T}$, kurz *mit* $\mathfrak{T}$ *vertauschbar* ist. Wir nennen ein solches f einen $\mathfrak{T}$-*Homomorphismus* und sagen dann, f *induziere* in seiner Bildmenge $f^\sim A$ die durch $f^{\varepsilon\in}\mathfrak{T}$ definierte Kongruenzstruktur und Kongruenztopologie. Wird diese Topologie eingeführt, dann ist f trivial *gleichmäßig stetig (uniformément continue)*. Für die Umgebungsfilterbasen bezüglich der durch einen $\mathfrak{T}$-Homomorphismus induzierten Topologie gilt:

(3.3.3) $\quad f^{\varepsilon\in}(\mathfrak{T}\,a)=(f^{\varepsilon\in}\mathfrak{T})\,(f\,a)$, *wenn* f *ein* $\mathfrak{T}$-*Homomorphismus ist,*

denn wegen $(S\circ R)\,a=S(Ra)$ ((1.2.8)!) und (2.3.3) wird $(f^\sim T)\,(f\,a)=(f^\sim\circ T\circ f^{\sim-})\,(f^\sim a)=(f^\sim\circ T\circ f^=)\,a=(f^\sim\circ T)\,a=f^\sim(T\,a)$, also

(3.3.4) $\quad (f^\sim E)\,(f\,a)=f^\sim(E\,a),\quad$ *wenn* $\quad E\circ f^=\,=f^=\circ E.$

Wir dehnen den Brauch, Bildmengen kanonischer Abbildungen modulo einer Äquivalenz Quotienten zu nennen und entsprechend zu bezeichnen, auf die Bilder von Filterbasen aus und nennen

(3.3.5) $\qquad \mathfrak{T}/E=(E\,a\,|\,a)^{\in\in}\mathfrak{T}=\{T/E\,|\,T\in\mathfrak{T}\}$

den *Quotienten der Kongruenzbasis* $\mathfrak{T}$ *modulo der mit* $\mathfrak{T}$ *vertauschbaren Kongruenz* E. Die durch $\mathfrak{T}/E$ in A/E definierte Kongruenzstruktur bzw. Kongruenztopologie nennen wir dann die *Quotientstruktur* bzw. *Quotienttopologie* modulo E der Kongruenzstruktur bzw. Kongruenztopologie in A [10]).

Nun sei A eine Unteralgebra der $\mathfrak{S}$-Algebra B. Die $S\cap A^2$ mit $S\in\mathfrak{S}$ sind nach (2.1.2) zulässig und wegen $(S\cap A^2)^-\circ(S\cap A^2)=(S\cap A^2)\circ(S\cap A^2)\leqq(S\circ S)\cap(A^2\circ A^2)=S\cap A^2\geqq I_B\cap I_A=I_A$ gemäß (1.3.7) Äquivalenzen über A, so daß $\{S\cap A^2\,|\,S\in\mathfrak{S}\}$ eine Kongruenzbasis über A ist, die die sog. durch $\mathfrak{S}$ in A *induzierte Unterkongruenzstruktur* bzw. *-topologie* definiert. *Trivial ist mit* $\mathfrak{S}$ *auch* $\{S\cap A^2\,|\,S\in\mathfrak{S}\}$ *separabel.* Für die Umgebungsfilterbasen gilt wegen ((3.2.1)!)

(3.3.6) $\quad Sa\cap A=(S\cap A^2)\,a\colon\ \{Sa\cap A\,|\,S\in\mathfrak{S}\}=\{S\cap A^2\,|\,S\in\mathfrak{S}\}\,a.$

3.4. Hüllen von Teilmengen und von Relationen. Ist A eine $\mathfrak{T}$-Algebra, dann bezeichnen wir mit $\overline{U}^{\mathfrak{T}}$ die *Hülle der Teilmenge* U von A bezüglich der $\mathfrak{T}$-Topologie in A und mit $\overline{R}^{\mathfrak{T}}$ die *Hülle der Relation* R über A bezüglich des Produktes der $\mathfrak{T}$-Topologie mit sich selbst in A^2. Es gilt dann:

(3.4.1) *Ist* $U\leqq A$ *zulässig bezüglich der partiellen Abbildungen* $\omega_{\iota'\in I'}\,a_{\iota'}$, *die für ein* $\omega\in\Omega$ *und ein* $I'<I_\omega$ *mit beliebigen* $a_{\iota'}$ *aus einer Teilmenge* U' *von* A *gebildet sind, dann ist* $\overline{U}^{\mathfrak{T}}$ *zulässig bezüglich der* $\omega_{\iota'\in I'}\,a_{\iota'}$ *mit beliebigen* $a_{\iota'}$ *aus* $\overline{U'}^{\mathfrak{T}}$.

(3.4.2) *Für* $U\leqq A$ *gilt* $\overline{U}^{\mathfrak{T}}=\bigcap_{T\in\mathfrak{T}}(TU)$.

[10]) Wegen der Vertauschbarkeitsvoraussetzung werden die Quotientstrukturen im allgemeinen nicht beachtet. Bei algebraischen Strukturen, wie Gruppen und Ringen, ist sie aber praktisch immer erfüllt. [Vgl. (7.2.1)!]

(3.4.3) *Für* $R \subseteq A^2$ *gilt* $\overline{R}^{\mathfrak{T}} = \bigcap_{T \in \mathfrak{T}} (T \circ R \circ T)$ *und* $\overline{(R\,a)}^{\mathfrak{T}} = \bigcap_{T \in \mathfrak{T}} (T \circ R)\,a \subseteq \overline{R}^{\mathfrak{T}} a$ *und, wenn* R *mit* $\mathfrak{T}$ *vertauschbar ist,* $\overline{(R\,a)}^{\mathfrak{T}} = \overline{R}^{\mathfrak{T}} a$.

(3.4.4) *Mit* E *ist auch* $\overline{E}^{\mathfrak{T}}$ *eine Kongruenz über* A, *wenn* E *mit* $\mathfrak{T}$ *vertauschbar ist.*

(3.4.5) *Die Kongruenzen* $E \in \supseteq \mathfrak{T}$ *sind bezüglich der* $\mathfrak{T}$*-Topologie abgeschlossen.*

Beweise. (3.4.1): Es sei $a_{\iota'} \in \overline{U'}^{\mathfrak{T}}$ für $\iota' \in I'$ und $a_{\iota''} \in \overline{U}^{\mathfrak{T}}$ für $\iota'' \notin I'$, so daß zu jedem $T \in \mathfrak{T}$ ein $a_{\iota',T} \in U' \cap T\,a_{\iota'}$ und ein $a_{\iota'',T} \in U \cap T\,a_{\iota''}$ existieren. Nach Voraussetzung gilt dann $(\omega_{\iota'}\,a_{\iota',T})_{\iota''}\,a_{\iota'',T} = \omega_{\iota \in I_\omega}\,a_{\iota,T} \in U$, und die Zulässigkeit von T liefert $\omega_\iota\,a_{\iota,T} \in T(\omega_\iota\,a_\iota)$, so daß U in der Tat jede Umgebung $T(\omega_{\iota'}\,a_{\iota'})_{\iota''}\,a_{\iota''}$ mit $T \in \mathfrak{T}$ schneidet. (3.4.2): $\overline{U}^{\mathfrak{T}} = \{a \mid T\,a \cap U \neq \varnothing$ *für alle* $T\} = \bigcap_T \{a \mid a'\,T\,a$ *für ein* $a' \in U\} = \bigcap_T T\,U$. (3.3.3): Nach (3.3.1) und (3.3.2) ist $\{T\,a' \times T\,a'' \mid T\}$ Umgebungsfilterbasis von $(a', a'') \in A^2$. Daher wird $\overline{R}^{\mathfrak{T}} = \{(a', a'') \mid (T\,a' \times T\,a'') \cap R \neq \varnothing$ *für alle* $T\} = \bigcap_T \{(a', a'') \mid a''\,T\,a_2\,R\,a_1\,T\,a'$ *für ein* $(a_1, a_2)\} = \bigcap_T \{(a', a'') \mid a''(T \circ R \circ T)\,a'\} = \bigcap_T (T \circ R \circ T)$. Daraus folgt mit (3.4.2) sofort $\overline{R}^{\mathfrak{T}} a = \bigcap_T (T \circ R \circ T)a \supseteq \bigcap_T (T \circ R)\,a = \bigcap_T T(R\,a) = \overline{(R\,a)}^{\mathfrak{T}}$, wo das Gleichheitszeichen steht, wenn R mit allen T vertauschbar ist. (3.4.4): Wegen (3.4.3) ist nach (2.2.1) und (2.2.2) $\overline{R}^{\mathfrak{T}}$ mit R zulässig, und weiter ergibt sich $(\overline{E}^{\mathfrak{T}}) \circ \overline{E}^{\mathfrak{T}} = \bigcap_T (T \circ E) \circ \bigcap_T (T \circ E) \subseteq \bigcap_T (T \circ E \circ T \circ E) = \bigcap_T (T \circ E) \supseteq I \circ I = I$. (3.4.5): Wegen $T \circ E = E = E \circ T$ für $T \subseteq E$ folgt aus (3.4.3) $\overline{E}^{\mathfrak{T}} \subseteq E$ für $E \in \supseteq \mathfrak{T}$.

Für $I' = \varnothing$ folgt aus (3.4.1) sofort, daß mit U auch $\overline{U}^{\mathfrak{T}}$ eine Unteralgebra von A ist[11]).

§ 4. Die algebraischen Topologien.

4.1. Ω-Produkte von Algebren. Um im Algebraischen separable Topologien einzuführen, d. h. aus dem Diskreten heraus zu definieren, stehen sofort die beiden folgenden Wege zur Verfügung: a) Man bildet topologische Produkte diskreter Algebren. b) Man wählt eine *separable* Menge $\mathfrak{E}$ von Kongruenzen über eine Algebra A aus, für die also $\bigcap_{E \in \mathfrak{E}} E = I$ gilt; der von $\mathfrak{E}$ über A erzeugte separable Nachbarschaftsfilter definiert dann in A eine separable Topologie[12]).

---

[11]) Die allgemeinere Aussage von (3.4.1) hat folgende Bedeutung: Ist A ein (der Einfachheit halber) kommutativer Ring mit dem Unterring U' und U ein Ideal aus U', dann folgt aus dem Korollar nur, daß $\overline{U}^{\mathfrak{T}}$ ein Unterring von $\overline{U'}^{\mathfrak{T}}$ ist, der bei Multiplikation mit einem Element aus U' in sich übergeht (und dazu muß man zu $\Omega = \{+, -, \cdot\}$ noch die Multiplikationen mit Elementen aus U' hinzugenommen denken). Erst die volle Aussage lehrt, daß $\overline{U}^{\mathfrak{T}}$ ein Ideal von $\overline{U'}^{\mathfrak{T}}$ ist, also auch bei Multiplikation mit einem nicht in U' liegenden Element aus $\overline{U'}^{\mathfrak{T}}$ in sich übergeht.

[12]) Zwei Beispiele mögen die beiden Wege illustrieren: a) Ist K ein Körper, Ω eine aus Unterkörpern Λ von K bestehende Aufbaumenge von K (der Name Aufbaumenge hat hier seinen Ursprung), $A = A_\varkappa$ für alle $\varkappa \in K$ eine kommutative Gruppe und $B \subseteq X = \times_\varkappa A_\varkappa = A^K$ eine Menge von Bewertungen von K in A hinein, dann wird in B durch das in X gebildete Ω-Produkt der diskreten Topologien der $A_\varkappa$ im wesentlichen eine Charakterentopologie im Sinne von Krull [1] induziert: In der Tat bedeutet $(b', b'') \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} I^{\ni}_{A\lambda}$, daß b' und b'' die gleiche Bewertung von A induzieren. b) Ist $\mathfrak{a}$ ein Ideal aus dem (kommutativen) Ringe A, für das $\bigcap_{\varkappa=1,2,\ldots} \mathfrak{a}^{\cdot\varkappa} = \{0\}$ gilt ($\mathfrak{a}^{\cdot\varkappa}$ ist die $\varkappa$-te Potenz von $\mathfrak{a}$ bezüglich der Idealmultiplikation), dann definiert das aus den Kongruenzen modulo der $\mathfrak{a}^{\cdot\varkappa}$ bestehende $\mathfrak{E} = \{\{(a', a'') \mid a' - a'' \in \mathfrak{a}^{\cdot\varkappa}\} \mid \varkappa = 1, 2, \ldots\} = \mathfrak{T}$ in A die $\mathfrak{a}$-adische Topologie im Sinne von Zariski [1].

Offenbar ist der erste Weg ein Spezialfall des zweiten, denn nach 3.3 wird ein $\mathfrak{L}$-Produkt von Topologien dadurch gebildet, daß über einer Produktalgebra eine Kongruenzbasis ausgezeichnet wird. Daß aber auch umgekehrt der zweite Weg auf eine Produktbildung zurückgeführt werden kann, wird sich in 5.3 herausstellen. Da andere Wege anscheinend nicht bekannt (und im allgemeinen wohl auch schwerlich denkbar) sind, wollen wir die nach a) oder b) erreichbaren Topologien einfach die *algebraischen Topologien* nennen.

Nach 3.3, wo im Sinne von a) jetzt $\mathfrak{T}_\varkappa = \{I_{A_\varkappa}\}$ zu setzen ist, bilden die

$$(4.1.1) \qquad \Lambda^* = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} I^{\ni}_{A_\lambda} = \{(x', x'') \mid x'\,\lambda = x''\,\lambda \quad \textit{für alle} \quad \lambda \in \Lambda\}$$

eine separable Kongruenzbasis $\mathfrak{L}^* = \{\Lambda^* \mid \Lambda \in \mathfrak{L}\}$ über $X = \times_\varkappa A_\varkappa$. Die durch $\mathfrak{L}^*$ über X definierte Kongruenzstruktur nennen wir $\mathfrak{L}$-*Struktur* und die durch diese in X induzierte Topologie die $\mathfrak{L}$-*Topologie*. Das mit $\mathfrak{L}$-Struktur und $\mathfrak{L}$-Topologie versehene X selbst ist dann nach 3.3 das $\mathfrak{L}$-*Produkt* der (diskreten) $A_\varkappa$.

4.2. Einige Sätze. Von den folgenden, auch an sich bemerkenswerten Sätzen sind für unsere weiteren, allgemeinen Untersuchungen nur (4.2.2) und (4.2.3) wichtig[13]).

(4.2.1) *In einem $\mathfrak{L}$-Produkt $X = \times_{\varkappa \in K} A_\varkappa$ ist $\{x' \mid x' \sim K' \subseteq x \sim K'\}$ für jedes $K' \subseteq K$ abgeschlossen und, wenn K' in einem $\Lambda \in \mathfrak{L}$ enthalten ist, auch $\{x' \mid x' \sim K' = x \sim K'\}$ sowie $\{x' \mid x'\,\varkappa' = x\,\varkappa'$ für alle $\varkappa' \in K'\} = K'^*\,x$ und K'^* selbst.*

Beweis. Wegen $\bigcup_\lambda \Lambda = K$ existiert zu jedem $\varkappa \in K$ ein $\Lambda_\varkappa \ni \varkappa$. Gehört x'' zur Hülle der ersten Menge, dann existiert zu jedem $\varkappa' \in K'$ ein $x_{\varkappa'} \in \Lambda^*_{\varkappa'}\,x''$ mit $x_{\varkappa'} \sim K' \subseteq x \sim K'$, so daß $x''\,\varkappa' = x_{\varkappa'}\,\varkappa' \in x \sim K'$. Gehört x'' zur Hülle der zweiten Menge, dann existiert zu jedem $\Lambda \supseteq K'$ ein $x' \in \Lambda^*\,x''$ mit $x' \sim K' = x \sim K'$, so daß $x'' \sim K' = x' \sim K' = x \sim K'$. Entsprechend ergibt sich die Abgeschlossenheit von $K'^*\,x$, die aber auch nach (3.4.3) aus der von K'^* folgt. Diese aber ist durch (3.4.5) gesichert, weil $K'^* = \bigcap_{\varkappa' \in K'} I^{\ni}_{A_{\varkappa'}}$ eine Kongruenz über X ist und trivial jedes Λ^* enthält, für das $K' \subseteq \Lambda$ gilt.

(4.2.2) *In einem $\mathfrak{L}$-Produkt $X = \times_\varkappa A_\varkappa$ sind genau die abgeschlossenen Teilmengen vollständige Unterräume.*

Beweis. Nach 3.3 ist X separabel. Wegen der Vollständigkeit der diskreten $A_\varkappa$ und wegen BOURBAKI [1], Chap. II, § 3, Prop. 6 folgt die Behauptung daher aus (4.2.3).

(4.2.3) *Die $\mathfrak{L}$-Produkte vollständiger $\mathfrak{T}_\varkappa$-Algebren $A_\varkappa$ sind vollständig.*

Beweis. Es bedeute ϱ_λ eine Funktion auf K mit $\varrho_\lambda\,\lambda \in \mathfrak{T}_\lambda$ für alle $\lambda \in \Lambda$ und mit $\varrho_\lambda\,\varkappa = A^2_\varkappa$ für alle $\varkappa \notin \Lambda$. Nach (3.2.2) und (3.3.1) enthält dann ein $\mathfrak{S} = \bigcap_{\varrho,\varkappa} \mathfrak{T}^{\ni}_\varkappa$-Filter (3.3!) $\mathfrak{F}$ in $X = \times_\varkappa A_\varkappa$ zu jedem ϱ_λ ein Element der Gestalt $F_{\varrho_\Lambda} = \times_\varkappa (\varrho_\lambda\,\varkappa)\,(x_{\varrho_\lambda}\,\varkappa)$ mit $x_{\varrho_\lambda} \in X$, und nach (3.2.3) ist $\{F_{\varrho_\Lambda} \mid \Lambda, \varrho_\lambda\}$ eine Filterbasis. Da nun ganz allgemein aus $\times_\varkappa U'_\varkappa \subseteq \times_\varkappa U''_\varkappa$ stets $U'_\varkappa \subseteq U''_\varkappa$ für alle $\varkappa$ folgt, bilden die $\{(\varrho_\lambda\,\varkappa)\,(x_{\varrho_\lambda}\,\varkappa) \mid \Lambda, \varrho_\lambda\}$ für jedes $\varkappa \in K$ eine Filterbasis über $A_\varkappa$, und die Gleichung $\varrho_\lambda\,\varkappa = T_\varkappa$ in ϱ_λ kann trivial für jedes $T_\varkappa \in \mathfrak{T}_\varkappa$ erfüllt werden,

[13]) Die Sätze (4.2.2) und (4.2.4) haben ihren speziellen Ursprung bei KRULL [1] (Satz 2 und 5), sind hier im allgemeinen Rahmen aber etwas modifiziert und ganz anders bewiesen.

weil stets ein $A \ni \varkappa$ existiert. Wegen der Vollständigkeit der $A_\varkappa$ existiert dann nach (3.2.5) zu jedem $\varkappa$ ein $a_\varkappa \in A_\varkappa$ so, daß $(a_\varkappa | \varkappa) \in F_{\varrho_\lambda}$ für alle ϱ_λ mit $A \in \mathfrak{L}$, und d.h. nach (3.2.4), daß $\mathfrak{F}$ gegen $(a_\varkappa | \varkappa) \in X$ konvergiert.

(4.2.4) *Ist A ein vollständiger Unterraum des $\mathfrak{L}$-Produktes $X = \times_\varkappa A_\varkappa$ und A/A^* für jedes $A \in \mathfrak{L}$ endlich, dann ist A kompakt (compact). (Eine unendliche Klasseneinteilung $\{A^* a \cap A | a \in A\}$ enthält trivial keine endliche Überdeckung von A!).*

Beweis. Da $A = \bigcup_{a' \in A} A^* a' \cap A$ nach Voraussetzung für jedes A nur endlich viele $A^* a' \cap A$ vereinigt, enthält ein *Ultrafilter (ultrafiltre)* $\mathfrak{F}$ von A zu jedem A ein $A^* a_A \cap A = (A^* \cap A^2) a_A$ ((3.3.6)!) mit $a_A \in A$ (Bourbaki [1], Chap. I, § 5, Prop. 5, Cor.). Mithin bilden die $(A^* \cap A^2) a_A$, mit $A \in \mathfrak{L}$, nach (3.2.3) und (3.2.2) eine $\{A^* \cap A^2 | A\}$-Filterbasis in A, und wegen der Vollständigkeit von A, muß diese gegen ein $a \in A$ konvergieren, so daß auch $\mathfrak{F} \geq \{(A^* \cap A^2) a_A | A\}$ in A (gegen a) konvergiert.

§ 5. Die Strukturanalyse einer Algebra.

5.1. Die grundlegenden Sätze. Wir sagen „die Äquivalenzen $F_\varkappa$ über A mit $\varkappa \in K$ *kollidieren miteinander*", wenn bei beliebiger Wahl der $a_\varkappa \in A$ stets $\bigcap_{\varkappa \in K} F_\varkappa a_\varkappa \neq \emptyset$ gilt, wenn also ((1.3.8)!) die Gleichungen $F_\varkappa a = F_\varkappa a_\varkappa$ $(\varkappa \in K)$ im Sinne der arithmetischen Kongruenzgleichungen stets simultan lösbar sind. Zur weiteren Verdeutlichung dieses Begriffes bemerken wir:

(5.1.1) *Die Äquivalenzen $F_1, \ldots, F_k$ über A kollidieren genau dann miteinander, wenn $F_\varkappa \circ (F_1 \cap \cdots \cap F_{\varkappa-1} \cap F_{\varkappa+1} \cap \cdots \cap F_k) = A^2$ für alle $\varkappa = 1, \ldots, k$ gilt.*

Beweis. $a \in F_1\, a' \cap \bigcap_{\varkappa=2,\ldots,k} F_\varkappa\, a''$ impliziert $a' (F_1 \circ \bigcap_{\varkappa>1} F_\varkappa)\, a''$. Umgekehrt folgt aus der Bedingung und der Isotonie der Komposition $(F_1 \cap \cdots \cap F_\varkappa) \circ F_{\varkappa+1} = A^2$ für alle $\varkappa = 1, \ldots, k-1$. Die Existenz eines $a \in F_1\, a_1 \cap \cdots \cap F_\varkappa\, a_\varkappa$ zu beliebig vorgegebenen $a_1, \ldots, a_k$ sei bereits bewiesen. Dann existiert ein a' mit $a (F_1 \cap \cdots \cap F_\varkappa)\, a'\, F_{\varkappa+1}\, a_{\varkappa+1}$, so daß $a' \in (F_1 \cap \cdots \cap F_\varkappa)\, a \cap F_{\varkappa+1}\, a_{\varkappa+1}$ und $(F_1 \cap \cdots \cap F_\varkappa)\, a = F_1\, a_1 \cap \cdots \cap F_\varkappa\, a_\varkappa$.

Einen Isomorphismus f von A auf ein Subprodukt $f^\sim A$ der $A_\varkappa$ mit $\varkappa \in K$ nennen wir eine *Zerlegung* von A in die $A_\varkappa$, und zwar eine *echte Zerlegung*, wenn $f^\sim A = \times_\varkappa A_\varkappa$ gilt[14]).

(5.1.2) *Ist f ein Homomorphismus von A, dann ist $g = (f\, a | f^= a)$ ein Isomorphismus von $A/f^=$ auf $f^\sim A$.*

(5.1.3) *Ist $f^\sim A \leq X = \times_\varkappa A_\varkappa$, dann gilt $f^= = \bigcap_\varkappa (\varkappa^\circ \circ f)^=$.*

(5.1.4) *Sind die $F_\varkappa$ $(\varkappa \in K)$ Kongruenzen über A, dann ist*

$$f = \left((F_\varkappa a | \varkappa) \middle| \bigcap_\varkappa F_\varkappa a\right)$$

[14]) Im allgemeinen werden die $A_\varkappa$ nicht zu Unteralgebren von $\times_\varkappa A_\varkappa$ (und damit bei echten Zerlegungen zu Unteralgebren von A) isomorph sein, wie dies z. B. bei Gruppen (die eine einelementige nur aus dem neutralen Element bestehende Unteralgebra enthalten) vermöge eines trivialen Isomorphismus der Fall ist. Es handelt sich also im allgemeinen nicht um eine Zerlegung in Unteralgebren. Unter Beachtung von § 7 und (5.1.4) läßt sich die Bedingung von (5.1.1) im Verein mit der Bedingung $\bigcap_\varkappa F_\varkappa = I$ leicht in ein weniger geläufiges Kriterium für die Direktheit endlicher Summenzerlegungen von Gruppen übersetzen.

eine Zerlegung von $A/\bigcap_\varkappa F_\varkappa$ in die $A/F_\varkappa$, und zwar genau dann echt, wenn die $F_\varkappa$ miteinander kollidieren[15]).

Beweise. (5.1.2): Nach (1.3.6) und (1.3.8) ist $f\,a' = f\,a''$ gleichbedeutend mit $f^= a' = f^= a''$. Daher existieren g und $g^=$, und nach (2.1.3), (2.3.1) und (2.4.1) ergibt sich sofort die Zulässigkeit von $g^\sim$. (5.1.3): $f\,a' = f\,a''$ ist gleichbedeutend mit $(\varkappa^\times \circ f)\,a' = (f\,a')\,\varkappa = (f\,a'')\,\varkappa = (\varkappa^\circ \circ f)\,a''$ für alle $\varkappa$. (5.1.4): $a'(\bigcap_\varkappa F_\varkappa)\,a$ ist gleichbedeutend mit $a'\,F_\varkappa\,a$ für alle $\varkappa$, d. h. f und f^- existieren, und wie bei $g^\sim$ in (5.1.2) folgt die Zulässigkeit von $f^\sim$. Schließlich ist $(F_\varkappa a|\varkappa) = (F_\varkappa a_\varkappa|\varkappa)$ wegen (1.3.8) gleichbedeutend mit $a \in \bigcap_\varkappa F_\varkappa a_\varkappa$.

Selbstverständlich identifiziert man A/I mit A durch

$$I\,a = a. \tag{5.1.5}$$

Und für $\bigcap_\varkappa F_\varkappa = I$ wollen wir A auch noch vermöge des Isomorphismus $f = ((F_\varkappa a|\varkappa)|a)$ mit $f^\sim A$ identifizieren, also in $X = \times_\varkappa A/F_\varkappa$ *kanonisch einbetten*, so daß

$$a = (F_\varkappa a|\varkappa) \quad \textit{für} \quad \bigcap_\varkappa F_\varkappa = I. \tag{5.1.6}$$

Es gilt dann:

(5.1.7) *Ist A kanonisch in $X = \times_\varkappa A/F_\varkappa$ eingebettet und stimmt die partielle Abbildung $\omega_{\iota' \in I'}\,a_{\iota'}$ eines $\omega \in \Omega$ auf A mit $\omega' \in \Omega$ überein, dann auch auf X*[16]).

Beweis. Setzt man $a_{\iota'} = a_{\varkappa,\iota'}$ für alle $\varkappa$, dann ergibt sich wegen (2.1.3), (2.4.6) und (5.1.6) $\omega'_{\iota''}(F_\varkappa a_{\varkappa,\iota''}|\varkappa) = \big((\omega_{\iota'}(F_\varkappa a_\iota))_{\iota''}(F_\varkappa a_{\varkappa,\iota''})\big|\varkappa\big) = \big(\omega_{\iota\in I_\omega}(F_\varkappa a_{\varkappa,\iota})|\varkappa\big) = \omega_\iota(F_\varkappa a_{\varkappa,\iota}|\varkappa) = \big(\omega_{\iota'}(F_\varkappa a_{\iota'}|\varkappa)\big)_{\iota''}(F_\varkappa a_{\varkappa,\iota''}|\varkappa) = (\omega_{\iota'}\,a_{\iota'})_{\iota''}(F_\varkappa a_{\varkappa,\iota''}|\varkappa)$.

Im folgenden dürfen wir uns also wegen (5.1.2) und (5.1.3) auf Zerlegungen von A in Quotienten $A_\varkappa = A/F_\varkappa$ mit $I = \bigcap_\varkappa F_\varkappa$ beschränken und werden stets A kanonisch in $X = \times_\varkappa A_\varkappa$ einbetten.

5.2. Die Vervollständigung einer Algebra. Einen gewissen, wenn auch groben Einblick in die Struktur einer Algebra A gewährt schon ein durchsichtig strukturierter Quotient derselben: man gewinnt Aussagen über das Verhalten gewisser Klassen von Elementen gegenüber den die algebraische Struktur definierenden Operationen. Einen tieferen Einblick in die Struktur von A erhält man, wenn es gelingt, A echt in durchsichtig strukturierte Algebren $A_\varkappa = A/F_\varkappa$ zu zerlegen, denn überblickt man die Strukturen der $A_\varkappa$, dann übersieht man auf Grund der einfachen Bildung der Produktstruktur in $X = \times_\varkappa A_\varkappa$ in etwa auch diese.

Eine unechte Zerlegung schließlich ist nach (5.1.4) wesentlich leichter erreichbar als eine echte, auch vergröbert sie die Struktur nicht wie eine Quotientenbildung, sondern bettet sie unverändert in eine übersichtlich strukturierte Algebra ein. Aber diese Einbettung als Subprodukt in ein Produkt

[15]) Hiernach entspricht also jeder Zerlegung f von A in $A_\varkappa$ eine Darstellung von $f^= = I_A$ als Durchschnitt von Kongruenzen $F_\varkappa \subseteq A^2$, wobei die $A_\varkappa$ zu den $A/F_\varkappa$ isomorph sind, und umgekehrt liefert jede Darstellung von I_A als Durchschnitt von Kongruenzen $F_\varkappa$ eine Zerlegung von A in die $A/F_\varkappa$.

[16]) Grob gesprochen ist also die auf X definierte partielle Abbildung gerade die operatorgemäße Fortsetzung der auf A definierten.

ist im allgemeinen recht locker, d.h. ein Produkt bietet Raum für recht unterschiedlich strukturierte Subprodukte (vgl. etwa KRULL [2]).

Hiernach liegt es nahe, die Algebra A in eine ihr enger als X anliegende Algebra A^* einzubetten, und zwar wird man als A^* eine A umfassende Unteralgebra von X wählen. Es liegt auf der Hand, als Elemente von A^* solche Funktionen $x \in X = \times_\varkappa A/F_\varkappa$ zu wählen, die auf gewissen Teilmengen $\Lambda \in \mathfrak{L}$ von K mit Funktionen aus dem in X kanonisch eingebetteten A übereinstimmen, für die also nach (4.1.1) und (1.2.4) $x \in \cap_\Lambda (\Lambda^* A)$ gilt. Wir definieren also

$$A^* = \cap_{\Lambda \in \mathfrak{L}} (\Lambda^* A), \tag{5.2.1}$$

und dies ist in der Tat für jede beliebige Menge $\mathfrak{L}$ von Teilmengen $\Lambda \subseteq K$ eine Unteralgebra von X[17]: Denn $x_\iota \in A^*$ bedeutet die Existenz von $a_{\iota,\Lambda} \in A$ mit $x_\iota \lambda = a_{\iota,\Lambda} \lambda$ für alle $\lambda \in \Lambda$, und daraus folgt nach (2.1.3) $(\omega_\iota x_\iota) \lambda = (\omega_\iota a_{\iota,\Lambda}) \lambda$ für alle $\lambda \in \Lambda$, also $\omega_\iota x_\iota \in \Lambda^* (\omega_\iota a_{\iota,\Lambda}) \subseteq \Lambda^* A$, und zwar für beliebiges $\Lambda \in \mathfrak{L}$.

Das natürlichste ist es, für $\mathfrak{L}$ die Menge der endlichen Teilmengen Λ von K zu wählen, aber wir werden im folgenden nur ihre Aufbaumengeneigenschaft benötigen. Jetzt ist aber A^* auf Grund von (5.2.1) nach 4.1 und (3.4.2) die Hülle $\bar{A}^{\mathfrak{L}^*}$ von A im $\mathfrak{L}$-Produkt X der $A/F_\varkappa$:

$$A^* = \bar{A}^{\mathfrak{L}^*}. \tag{5.2.2}$$

Und diese einfache topologische Kennzeichnung des algebraisch definierten A^* rechtfertigt nun die Berücksichtigung der algebraischen Topologie in X bei der Strukturanalyse von A. Wegen (4.2.2) nennen wir A^* die *vollständige Hülle von A bezüglich $\mathfrak{L}$ und $(F_\varkappa | \varkappa \in K)$.*

5.3. Die Nachbarschaften in A und A^*. Für die durch $\mathfrak{L}^*$ in A und A^* induzierten Nachbarschaften führen wir zur Abkürzung die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\begin{cases} F_\Lambda = \Lambda^* \cap A^2 & \text{mit} \quad \mathfrak{F} = \{F_\Lambda | \Lambda \in \mathfrak{L}\} \quad \text{und} \\ F_\Lambda^* = \Lambda^* \cap A^{*2} & \text{mit} \quad \mathfrak{F}^* = \{F_\Lambda^* | \Lambda \in \mathfrak{L}\}. \end{cases} \tag{5.3.1}$$

Nach (4.1.1), (5.1.6) und (1.3.8) ergibt sich dann

$$F_\Lambda = \cap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda, \quad \text{so daß} \quad \mathfrak{F} = \cap_{\mathfrak{L}, \varkappa \in K} \{F_\varkappa\}. \tag{5.3.2}$$

Im Falle $\mathfrak{L} = \{\Lambda | \Lambda \text{ endlich} \subseteq K\}$ induziert also $\mathfrak{L}^*$ gemäß 3.3 in A gerade die in 4.1 unter b) genannte Kongruenzstruktur für $\mathfrak{E} = \{F_\varkappa | \varkappa\}$, und *damit ist in der Tat der zweite Weg in 4.1 auf den ersten zurückgeführt.*

Das Studium von $\mathfrak{F}^*$ erfordert einige Vorbereitungen, die auch bei den weiteren Untersuchungen immer wieder benötigt werden. Nach (4.1.1), (5.1.6) und (1.3.8) bedeutet $x \in \Lambda^* A$ die Existenz eines $a \in A$ mit $a \in \cap_{\lambda \in \Lambda} x \lambda$. Daher ergibt sich wegen (5.2.1) und 3.1

(5.3.3) *$x \in A^*$, genau wenn $\cap_{\mathfrak{L}, \varkappa} \{x \varkappa\}$ eine Filterbasis ist.*

[17]) Man könnte auch an $A^* = \cup_\Lambda \Lambda^* A$ denken, was sich übrigens trivial weniger eng an A anschmiegt, aber man überlegt sich leicht, daß dieses A^* im allgemeinen nur dann eine Algebra sein wird, wenn $\mathfrak{L}$ mit $\{\Lambda_\iota | \iota \in I_\omega\}$ stets ein $\Lambda \subseteq \cap_\iota \Lambda_\iota$ enthält.

$a \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} a^* \lambda$ $(a^* \in A^*)$ impliziert wegen (1.3.8) $F_\lambda a = a^* \lambda$ für alle $\lambda \in \Lambda$ und damit wegen (5.3.2) $F_\Lambda a = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} a^* \lambda$. Da jedes $E \in \supseteq_{A^2} \mathfrak{F}$ ein $F_\Lambda \in \mathfrak{F}$ umfaßt, enthält $\supseteq_A \bigcap_{\mathfrak{L}, \varkappa} \{a^* \varkappa\}$ eine und als Filter nach (1.3.8) auch nur eine E-Klasse $E a \supseteq F_\Lambda a$ für $a \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} a^* \lambda$. Also gilt: Die *symbolischen Schnitte* (5.3.4) $E \cap a^* = (A/E \cap \supseteq_A \bigcap_{\mathfrak{L}, \varkappa} \{a^* \varkappa\})$ [18] *und* $\mathfrak{E} \cap a^* = \{E \cap a^* \mid E \in \mathfrak{E}\}$ *existieren für Elemente* $a^* \in A^*$ *und Kongruenzen* $E \in \supseteq_{A^2} \mathfrak{F}$. *Insbesondere wird* $F_\Lambda \cap a^* = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} a^* \lambda$ *und damit* $\mathfrak{F} \cap a^* = \bigcap_{\mathfrak{L}, \varkappa} \{a^* \varkappa\}$, *so daß* $\mathfrak{F} \cap a^*$ *nach* (5.3.3) *und* (3.2.2) *eine* $\mathfrak{F}$*-Filterbasis ist.*

Darüber hinaus benötigen wir noch die folgenden Eigenschaften der symbolischen Schnitte:

(5.3.5) $E \cap a = E a$ *und* $F_\varkappa \cap a^* = a^* \varkappa$.

(5.3.6) $E' \subseteq E''$ *impliziert* $E' \cap a^* \subseteq E'' \cap a^*$ *und, wenn* $E' \cap a^{*\prime} = E' \cap a^{*\prime\prime}$ *gilt, auch* $E'' \cap a^{*\prime} = E'' \cap a^{*\prime\prime}$.

(5.3.7) *Für eine Menge* $\mathfrak{E}$ *von Kongruenzen über* A *(mit* $\bigcap_{E \in \mathfrak{E}} E \in \supseteq_{A^2} \mathfrak{F}$*) gilt* $(\bigcap_{E \in \mathfrak{E}} E) \cap a^* = \bigcap_{E \in \mathfrak{E}} (E \cap a^*)$.

(5.3.8) *Für Kongruenzen* $E \in \supseteq_{A^2} F$ *und* $\omega \in \Omega$ *gilt*

$$E \cap \omega_\iota a_\iota^* = \omega_\iota (E \cap a_\iota^*).$$

Beweise. (5.3.5): Wegen $E \cap a \in \supseteq_A \bigcap_{\mathfrak{L}, \varkappa} \{a \varkappa\}$ existiert ein $\Lambda \in \mathfrak{L}$ mit $E \cap a \supseteq \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda a \ni a$ ((5.1.6)!), und trivial gilt $a^* \varkappa \in A/F_\varkappa \cap \supseteq_A \bigcap_{\mathfrak{L}, \varkappa} \{a^* \varkappa\}$. (5.3.6): Aus $a \in E' \cap a^*$ folgt $E' \cap a^* = E' a \subseteq E'' a$, also $E'' a \in \supseteq_A \bigcap_{\mathfrak{L}, \varkappa} \{a^* \varkappa\}$ und daher $E'' a = E'' \cap a^*$. Insbesondere gilt $E'' \cap a^{*\prime} \supseteq E' \cap a^{*\prime} = E' \cap a^{*\prime\prime} \subseteq E'' \cap a^{*\prime\prime}$, also wegen (1.3.8) $E'' \cap a^{*\prime} = E'' \cap a^{*\prime\prime}$. (5.3.7): $(\bigcap_{E \in \mathfrak{E}} E) \cap a^* = \bigcap_{E \in \mathfrak{E}} E a \subseteq E a$ impliziert $E a = E \cap a^*$. (5.3.8): Aus $F_\Lambda \subseteq E$ und $a_\iota \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} a_\iota^* \lambda$ folgt wegen (5.3.5), (5.3.7), (5.3.2) und (5.3.6) $a_\iota \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \cap a_\iota^* \subseteq E \cap a_\iota^*$ und damit wegen (2.1.3) und (2.4.1) $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} (\omega_\iota a_\iota^*) \lambda = \bigcap_\lambda \omega_\iota (a_\iota^* \lambda) = \bigcap_\lambda \omega_\iota (F_\lambda \cap a_\iota^*) = \bigcap_\lambda \omega_\iota (F_\lambda a_\iota) = F_\Lambda (\omega_\iota a_\iota) \subseteq E (\omega_\iota a_\iota) = \omega_\iota (E a_\iota) = \omega_\iota (E \cap a_\iota^*)$, so daß in der Tat $\omega_\iota (E \cap a_\iota^*) \in \supseteq_A \bigcap_{\mathfrak{L}, \varkappa} \{(\omega_\iota a_\iota^*) \varkappa\}$ gilt.

Damit zeigen wir jetzt:

(5.3.9) $F_A^* = \{(a^{*\prime}, a^{*\prime\prime}) \mid F_\Lambda \cap a^{*\prime} = F_\Lambda \cap a^{*\prime\prime}\}$.

(5.3.10) *Für* $E \in \supseteq_{A^2} \mathfrak{F}$ *ist* $\overline{E}^{\mathfrak{L}^*}$ *eine Kongruenz über* A^* *und es gilt:*

$$\overline{E}^{\mathfrak{L}^*} = \overline{E}^{\mathfrak{F}^*} = \{(a^{*\prime}, a^{*\prime\prime}) \mid E \cap a^{*\prime} = E \cap a^{*\prime\prime}\},$$

so daß $F_A^* = \overline{F_A}^{\mathfrak{F}^*}$ *und* $\overline{E}^{\mathfrak{F}^*} \cap A^2 = E$

(5.3.11) $\bigcap_{E \in \mathfrak{E}} \overline{E}^{\mathfrak{F}^*} = \overline{(\bigcap_{E \in \mathfrak{E}} E)}^{\mathfrak{F}^*}$ *für* $\bigcap_{E \in \mathfrak{E}} E \in \supseteq_{A^2} \mathfrak{F}$.

(5.3.12) $\overline{E}^{\mathfrak{F}^*} a^* \cap A = E \cap a^*$, $\overline{(E \cap a^*)}^{\mathfrak{F}^*} = \overline{E}^{\mathfrak{F}^*} a^*$.

Beweise. (5.3.9): $a^{*\prime\prime} F_\Lambda^* a^{*\prime}$ bedeutet wegen (5.3.1) $a^{*\prime} \lambda = a^{*\prime\prime} \lambda$, d.h. also nach (5.3.5) $F_\lambda \cap a^{*\prime} = F_\lambda \cap a^{*\prime\prime}$, für alle $\lambda \in \Lambda$, und dies ist wegen (5.3.7), (5.3.2) und (5.3.6) gleichbedeutend mit $F_\Lambda \cap a^{*\prime} = F_\Lambda \cap a^{*\prime\prime}$.

[18] Die durch (5.3.5) nahegelegte Bezeichnung $E \cap a^* = E a^*$ ist nicht statthaft, weil gemäß (1.2.4) und (1.2.6) $E a^*$ für ein $a^* \in A$ leer wird. Die Bezeichnung $E \cap a^* = a^* E$, die ebenfalls durch (5.3.5) nahegelegt wird, führt unter Umständen zu Verwechslungen, wenn K Kongruenzen $\varkappa$ aus $\supseteq_{A^2} \mathfrak{F}$ enthält: Es muß dann nämlich zwischen der $\varkappa$-Klasse $\varkappa \cap a^*$ und der $F_\varkappa$-Klasse $a^* \varkappa$ unterschieden werden.

(5.3.10): Mit (5.2.2) gilt trivial $\overline{E}^{\mathfrak{L}^*} \leq \overline{(A^2)}^{\mathfrak{L}^*} = (\overline{A}^{\mathfrak{L}^*})^2 = A^{*2}$ und nach (3.4.3) $\overline{E}^{\mathfrak{L}^*} = \bigcap_{A \in \mathfrak{L}} (A^* \circ E \circ A^*) \geq \bigcap_{A \in \mathfrak{L}} (F_A^* \circ E \circ F_A^*) = \overline{E}^{\mathfrak{S}^*}$ wegen (5.3.1) und der Isotonie der Komposition. $a \in A^* a^*$ ist wegen (5.3.1) gleichbedeutend mit $a \in A^* a^* \cap A^* = F_A^* a^*$. $a^{*\prime} (A^* \circ E \circ A^*) a^{*\prime}$ bedeutet ersichtlich ((1.3.8)!) die Existenz eines $E a$, das sowohl $A^* a^{*\prime}$ als auch $A^* a^{*\prime\prime}$ schneidet, und damit nach dem eben festgestellten $a^{*\prime} (F_A^* \circ E \circ F_A^*) a^{*\prime}$. Dies wiederum ist gleichbedeutend mit der Existenz eines $E a_A$, das $F_A \cap a^{*\prime}$ und $F_A \cap a^{*\prime\prime}$ trifft, denn $a \in F_A^* a^*$ bedeutet wegen (5.3.9), (5.3.5) und (1.3.8) $a \in F_A \cap a^*$. Gilt nun $E \cap a^{*\prime} = E \cap a^{*\prime\prime} = E a$, dann schneidet diese E-Klasse als gemeinsames Element der Filter $((5.3.4)!) \geq_A (\mathfrak{F} \cap a^{*\prime})$ und $\geq_A (\mathfrak{F} \cap a^{*\prime\prime})$ alle anderen Elemente derselben, also gilt $a^{*\prime} \overline{E}^{\mathfrak{S}^*} a^{*\prime}$. Umgekehrt folgt für ein $F_A \leq E$ aus der Existenz eines $E a_A$, das $F_A \cap a^{*\prime}$ und $F_A \cap a^{*\prime\prime}$ trifft, wegen (1.3.8) sofort $F_A \cap a^{*\prime} \leq E a_A \geq F_A \cap a^{*\prime\prime}$, also $E \cap a^{*\prime} = E a_A = E \cap a^{*\prime\prime}$. Die Äquivalenzeigenschaft von $\overline{E}^{\mathfrak{L}^*}$ ist jetzt trivial und die Zulässigkeit folgt aus (5.3.8) [oder aus (3.4.3) wegen (2.2.1) und (2.1.2)].

(5.3.11): Nach (5.3.7) und (5.3.6) ist $E \cap a^{*\prime} = E \cap a^{*\prime\prime}$ für alle $E \in \mathfrak{E}$ gleichbedeutend mit $\bigcap_{E \in \mathfrak{E}} E \cap a^{*\prime} = \bigcap_{E \in \mathfrak{E}} E \cap a^{*\prime\prime}$.

(5.3.12): $a \in \overline{E}^{\mathfrak{S}^*} a^*$ bedeutet nach (5.3.10), (5.3.5) und (1.3.8) $a \in E \cap a^*$. $a^{*\prime} \in \overline{(E \cap a^*)}^{\mathfrak{S}^*}$ bedeutet $F_A^* a^{*\prime} \cap (E \cap a^*) \neq \varnothing$ für alle A oder wegen $E \cap a^* \leq A$ und (5.3.10) nach dem schon bewiesenen Teil von (5.3.12) $(F_A \cap a^{*\prime}) \cap (E \cap a^*) \neq \varnothing$ für alle $A \in \mathfrak{L}$. $a^{*\prime} \in \overline{E}^{\mathfrak{S}^*} a^*$ bedeutet nach (5.3.10) $E \cap a^{*\prime} = E \cap a^*$. Hieraus folgt wegen der Filtereigenschaft von $\geq_A (\mathfrak{F} \cap a^{*\prime})$ ((5.3.4)!), daß $E \cap a^*$ alle $F_A \cap a^{*\prime}$ trifft, und umgekehrt folgt hieraus wieder mit (1.3.8) für ein $F_A \leq E$: $F_A \cap a^{*\prime} \leq E \cap a^*$ und damit $E \cap a^* = E \cap a^{*\prime}$.

5.4. Die Reduktion auf $\mathfrak{T}$-Hüllen. Die Bestimmungsstücke eines gemäß 5.2 gebildeten $A^* \leq X = \times_\varkappa A/F_\varkappa$ sind zunächst die $F_\varkappa$ mit $\varkappa \in K$ und $\mathfrak{L}$. Es ist aber A^* schon durch $\geq_{A^2} \mathfrak{F} = \geq_{A^2} \bigcap_{\mathfrak{L}, \varkappa \in K} \{F_\varkappa\}$ ((5.3.2)!) bis auf Simultanisomorphie im Sinne von 3.2 eindeutig bestimmt[19]). Dies folgt, wie wir sehen werden, sofort aus dem Satz:

(5.4.1) *$\mathfrak{S}$ sei eine separable Kongruenzbasis über der bezüglich $\mathfrak{S}$ vollständigen Algebra B. A sei eine in B bezüglich der $\mathfrak{S}$-Topologie dicht (dense) liegende Unteralgebra von B. Zugleich sei A bezüglich der Kongruenzen $F_\varkappa$ über A mit $\varkappa \in K$ kanonisch in das $\mathfrak{L}$-Produkt $X = \times_{\varkappa \in K} A/F_\varkappa$ eingebettet und A^* die Hülle $\overline{A}^{\mathfrak{L}^*}$ in X von A bezüglich der $\mathfrak{L}$-Topologie. Induzieren jetzt $\mathfrak{L}^*$ und $\mathfrak{S}$ die gleiche Kongruenzstruktur in A, d.h. gilt*

$$\geq_{A^2} \{A^* \cap A^2 | A \in \mathfrak{L}\} = \geq_{A^2} \{S \cap A^2 | S \in \mathfrak{S}\},$$

dann ist

$$f = \left(((A/F_\varkappa \cap \geq_A \{S\, b \cap A | S \in \mathfrak{S}\})^\bullet | \varkappa \in K) | b \in B\right)$$

ein A elementeweise festlassender Simultanisomorphismus von B auf A^* mit der Umkehrung

$$g = \left(\{b | \mathfrak{S}\, b \leq \geq_B \bigcap_{\mathfrak{L}, \varkappa \in K} \{a^* \varkappa\}\}^\bullet | a^* \in A^*\right).$$

[19]) Aus (4.2.2) und Bourbaki [1], Kap. II, § 3, Théorèm 2 folgt lediglich die Eindeutigkeit bezüglich der gleichmäßigen Struktur.

Beweis. α) Da $\overline{A}^{\mathfrak{S}} = B$, also stets $S\,b \cap A \neq \varnothing$ gilt, ist mit $\mathfrak{S}\,b$ auch $\{S\,b \cap A \mid S\}$ eine Filterbasis, und zwar wegen $(S\,b \cap A) \times (S\,b \cap A) \subseteq S \cap A^2$ (Beweis von (3.2.2)!) und der Voraussetzung sogar eine $\mathfrak{F}$-Filterbasis ((5.3.1)!). Nach (3.2.2) enthält $\geqq_A \{S\,b \cap A \mid S\}$ dann zu jedem $\Lambda \in \mathfrak{L}$ eine F_Λ-Klasse und wegen (5.3.2) also erst recht zu jedem $\varkappa \in K$ eine $F_\varkappa$-Klasse. Mithin existieren in der Tat die $(f\,b)\,\varkappa$, und zwar folgt aus $F_\Lambda\,a \in \geqq_A \{S\,b \cap A \mid S\}$ sofort $F_\lambda\,a = (f\,b)\,\lambda$ für alle $\lambda \in \Lambda$, so daß $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} (f\,b)\,\lambda = F_\Lambda\,a$, also

$$(\alpha.\alpha) \qquad \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (f\,b)\,\lambda = (A/F_\Lambda \cap \geqq_A \{S\,b \cap A \mid S\})^\bullet \quad \text{für alle} \quad \Lambda \in \mathfrak{L}.$$

Insbesondere enthält daher $\bigcap_{\mathfrak{L},\varkappa} \{(f\,b)\,\varkappa\}$ nicht die leere Menge, ist also eine Filterbasis (3.1!), und nach (5.3.3) gilt $f\,b \in A^*$.

β) Nach (5.3.4) ist $\mathfrak{F} \cap a^*$ eine $\mathfrak{F}$-Filterbasis und zufolge der Voraussetzung ist dann wegen (5.3.1) $\geqq_B (\mathfrak{F} \cap a^*)$ ein $\mathfrak{S}$-Filter. Wegen der Separabilität und der Vollständigkeit von B konvergiert dieser gegen genau ein $b \in B$: $\mathfrak{S}\,b \subseteq \geqq_B (\mathfrak{F} \cap a^*)$, so daß wegen (5.3.4) in der Tat $g\,a^* \in B$ existiert.

γ) Aus der Definition von g folgt mit (5.3.4) und $(\alpha.\alpha)$

$$\mathfrak{S}\,(g\,(f\,b)) \subseteq \geqq_B (\mathfrak{F} \cap f\,b) \subseteq \geqq_B \{S\,b \cap A \mid S\} \supseteq \mathfrak{S}\,b, \qquad \text{also} \qquad g\,(f\,b) = b,$$

denn ein Filter im separablen B kann nicht gegen zwei verschiedene Punkte konvergieren. Mit (5.3.4) folgt aus $(\alpha.\alpha)$ und der Definition von g

$$(\gamma.\alpha) \qquad \mathfrak{F} \cap f\,(g\,a^*) \subseteq \geqq_A \{S\,(g\,a^*) \cap A \mid S\} \subseteq \geqq_A \{\mathfrak{F} \cap a^*\},$$

wegen (1.3.8) also $F_\Lambda \cap f\,(g\,a^*) = F_\Lambda \cap a^*$ für alle Λ und damit wegen (5.3.2), (5.3.6) und (5.3.5) schließlich $(f\,(g\,a^*))\,\varkappa = a^*\,\varkappa$ für alle $\varkappa$, d.h. $f\,(g\,a^*) = a^*$. Nach $(\alpha.\alpha)$ gilt $(f\,a)\,\varkappa \in \geqq_A \{S\,a \cap A \mid S\}$ für alle $\varkappa$, also $a \in (f\,a)\,\varkappa$. Wegen (5.1.6) heißt das aber $f\,a = (F_\varkappa\,a \mid \varkappa) = a$, und dies zusammen mit den eben bewiesenen Gleichungen $g\,(f\,b) = b$ und $f\,(g\,a^*) = a^*$, daß f in der Tat eine A elementeweise fest lassende umkehrbare Abbildung von B auf A^* mit der Umkehrung g ist.

δ) Für $g\,a^* = b$ folgt aus $(\gamma.\alpha)$ und $f\,(g\,a^*) = a^*$

$$(\delta.\alpha) \qquad \geqq_A (\mathfrak{F} \cap f\,b) = \geqq_A \{S\,b \cap A \mid S\}.$$

Wegen der Filterbasiseigenschaft von $\mathfrak{S}$ existiert nach $(\delta.\alpha)$ zu jedem F_Λ ein S mit $(F_\Lambda \cap f\,b') \cap (F_\Lambda \cap f\,b'') \supseteq S\,b' \cap A \cap S\,b''$, so daß aus $b''\,S\,b'$ wegen (1.3.8) und (5.3.9) $(f\,b'')\,F_\Lambda^*\,(f\,b')$ folgt. Umgekehrt existiert wegen (5.3.6) und der Filterbasiseigenschaft von $\mathfrak{F}$ nach $(\delta.\alpha)$ zu jedem S ein F_Λ mit $S\,b' \cap A \cap S\,b'' \supseteq (F_\Lambda \cap f\,b') \cap (F_\Lambda \cap f\,b'')$, so daß aus $(f\,b'')\,F_\Lambda^*\,(f\,b')$ wegen (5.3.9) und (1.3.8) $b''\,S\,b'$ folgt. Mithin sind f und $g = f$ gleichmäßig stetig, d.h. f ist ein Isomorphismus bezüglich der gleichmäßigen Strukturen in A^* und B (BOURBAKI [1], Chap. II, § 2, Prop. 4).

ε) Es bleibt nur noch die Homorphieeigenschaft von f zu zeigen. Da jedes $\varkappa$ in einem Λ enthalten ist, existiert wegen (5.3.2) und der Voraussetzung zu $\varkappa$ ein S mit $F_\varkappa \supseteq S \cap A^2$ und, weil A dicht in B liegt, zu jedem $b_\iota \in B$ ein $a_\iota \in A$ mit $a_\iota\,S\,b_\iota$. Daher gilt $F_\varkappa\,a_\iota \supseteq S\,a_\iota \cap A = S\,b_\iota \cap A$ ((1.3.8)!), und das bedeutet nach Definition von f: $F_\varkappa\,a_\iota = (f\,b_\iota)\,\varkappa$. Damit wird nach (2.1.3)

und (2.4.1) $(\omega_\iota(f\,b_\iota))\,\varkappa = \omega_\iota\,((f\,b_\iota)\,\varkappa) = \omega_\iota(F_\varkappa\,a_\iota) = F_\varkappa(\omega_\iota\,a_\iota) \supseteq (S \cap A^2)\,(\omega_\iota\,a_\iota) = S\,(\omega_\iota\,a_\iota) \cap A = \omega_\iota(S\,a_\iota) \cap A = \omega_\iota(S\,b_\iota) \cap A = S\,(\omega_\iota\,b_\iota) \cap A$, also wieder nach der Definition von f: $(\omega_\iota(f\,b_\iota))\,\varkappa = (f\,(\omega_\iota\,b_\iota))\,\varkappa$ für alle $\varkappa$, so daß in der Tat $\omega_\iota(f\,b_\iota) = f\,(\omega_\iota\,b_\iota)$.

Ist nun $A^{*\prime} = \overline{A}^{\mathfrak{L}^{\prime *}}$ die Hülle von A im $\mathfrak{L}'$-Produkt $X' = \times_{\varkappa' \in K'} A/F'_{\varkappa'}$, während A^* die gleiche Bedeutung wie in (5.4.1) besitzt, und gilt

$$\geqq_{A^2}\{A^* \cap A^2 \mid A \in \mathfrak{L}\} = \geqq_{A^2}\{A'^* \cap A^2 \mid A' \in \mathfrak{L}'\}, \tag{5.4.2}$$

dann sind wie angekündigt A^* und $A^{*\prime}$ in der Tat simultanisomorph zueinander, denn die Voraussetzungen von (5.4.1) sind wegen (4.2.2) für $B = A^{*\prime}$ und $\mathfrak{S} = \{A'^* \quad A^{*\prime 2} \mid A'\}$ erfüllt. Man hat somit die Möglichkeit, eine im Hinblick auf den Zweck der Strukturanalyse getroffene Wahl von $(F_\varkappa \mid \varkappa)$ und $\mathfrak{L}$ noch im Hinblick etwa auf eine einfache rechnerische Beherrschung der Hülle von A in gewissen Grenzen zu verbessern. Insbesondere kann man stets von $(F_\varkappa \mid \varkappa \in K)$ und $\mathfrak{L}$ zu $(F_T \mid T \in \mathfrak{T})$ mit $F_T = T$ und

$$\mathfrak{L}_\mathfrak{T} = \{A_\mathfrak{T} \mid A_\mathfrak{T} \quad \textit{endlich} \subseteq \mathfrak{T}\} \tag{5.4.3}$$

übergehen, wo $\mathfrak{T}$ eine den gleichen Filter wie $\mathfrak{F}$ erzeugende Kongruenzbasis über A ist, denn wegen der Filterbasiseigenschaft von $\mathfrak{T}$ gilt dann trivial $\geqq_{A^2}\mathfrak{F} = \geqq_{A^2}\mathfrak{T} = \geqq_{A^2} \bigcap_{\mathfrak{L}_\mathfrak{T},\, T \in \mathfrak{T}} \{F_T\}$, und das ist wegen (5.3.1) und (5.3.2) gerade (5.4.2) für $K' = \mathfrak{T}$ und $\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}_\mathfrak{T}$.

Im folgenden können wir uns also bei der Vervollständigung einer Algebra A im Sinne von 5.2 auf den Fall

$$K = \mathfrak{T}, \quad F_T = T \quad \textit{für alle} \quad T \in \mathfrak{T}, \quad \mathfrak{L} = \mathfrak{L}_\mathfrak{T} \tag{5.4.4}$$

beschränken. Wir nennen die hiernach gebildete Hülle $A^* = \overline{A}^{\mathfrak{L}^*_\mathfrak{T}} \subseteq \times_{T \in \mathfrak{T}} A/T$ einer $\mathfrak{T}$-Algebra A deren $\mathfrak{T}$-*Hülle*. Setzt man hier noch

$$T^* = \overline{T}^{\mathfrak{L}^*_\mathfrak{T}} \quad \text{und} \quad \mathfrak{T}^* = \{\overline{T}^{\mathfrak{L}^*_\mathfrak{T}} \mid_T T \in \mathfrak{T}\}, \tag{5.4.5}$$

was ersichtlich eine Filterbasis über A^* ist, dann ergibt sich

$$\geqq_{A^2}\mathfrak{F} = \geqq_{A^2}\mathfrak{T} \quad \textit{und} \quad \geqq_{A^{*2}}\mathfrak{F}^* = \geqq_{A^{*2}}\mathfrak{T}^* \quad \text{sowie:} \tag{5.4.6}$$

(5.4.7) *Es gilt $x \in A^*$, genau wenn $\{x\,T \mid T \in \mathfrak{T}\}$ eine Filterbasis ist.*

Beweise. (5.4.6): Wegen (5.3.2) und der Filterbasiseigenschaft von $\mathfrak{T}$ gilt $\geqq_{A^2}\mathfrak{F} = \geqq_{A^2} \bigcap_{\mathfrak{L}_\mathfrak{T},\, T} \{T\} = \geqq_{A^2}\mathfrak{T}$, und daraus folgt wegen (5.3.10) und (5.4.5) sofort auch die zweite Behauptung, wenn man zu den Hüllen der $F_{A_\mathfrak{T}}$ und T bezüglich $\mathfrak{L}^*_\mathfrak{T}$ übergeht. (5.4.7): Die Bedingung folgt wegen (5.3.6) mit (5.4.4) und (5.3.5) sofort aus der Filterbasiseigenschaft von $\mathfrak{T}$, und umgekehrt folgt aus der Bedingung trivial die Bedingung von (5.3.3).

Da nach (5.4.6) die durch $\mathfrak{L}^*_\mathfrak{T}$ in $\overline{A}^{\mathfrak{L}^*_\mathfrak{T}}$ induzierte $\mathfrak{F}^*$-Topologie gleich der $\mathfrak{T}^*$-Topologie ist, können wir die $\mathfrak{T}$-Hülle von A auch durch $\overline{A}^{\mathfrak{T}^*}$ ausreichend bezeichnen. Ebenso wird wegen (5.3.10) $\overline{E}^{\mathfrak{L}^*_\mathfrak{T}} = \overline{E}^{\mathfrak{T}^*}$. *Die bequemen Bezeichnungen $A^* = \overline{A}^{\mathfrak{T}^*}$ und $T^* = \overline{T}^{\mathfrak{T}^*}$ für $T \in \mathfrak{T}$ darf man nur verwenden, wenn nicht zugleich mit der $\mathfrak{T}$-Hülle auch eine $\mathfrak{S}$-Hülle betrachtet wird.* (Man beachte, daß $T \in \mathfrak{S}$ gelten kann!) Weiter sind wegen (5.4.6) und (5.4.7) bei den $\mathfrak{T}$-Hüllen

die $\mathfrak{L}$-Schnittbildungen von (5.3.2) und (5.3.3) überflüssig, so daß bei ihnen überhaupt keine Aufbaumengen in Erscheinung treten. Schließlich ergibt sich bei $\mathfrak{T}$-Hüllen auch noch eine bezeichnungstechnische Vereinfachung (vgl. Anm. 18!): Für Kongruenzen $E \in \supseteq_{A^2}\mathfrak{T}$ und aus solchen bestehenden Mengen $\mathfrak{E}$ kann

(5.4.8) $\qquad E \cap a^* = a^* E \quad$ *und* $\quad \mathfrak{E} \cap a^* = \{a^* E \mid E \in \mathfrak{E}\} = a^* \mathfrak{E}$

geschrieben werden, denn für $E = T \in \mathfrak{T}$ steht diese Definition wegen (5.4.4) nicht im Widerspruch zu (5.3.5): $F_T \cap a^* = a^* T$.

Die Gln. (5.4.3) *bis* (5.4.8) *sind im folgenden bei Verweisen auf* 5.3 *stets zu berücksichtigen.*

Wir schließen mit der jetzt trivialen Bemerkung, *daß es zu jeder separablen $\mathfrak{T}$-Algebra A im wesentlichen nur eine separable vollständige Hülle B und auch nur eine Fortsetzung von Ω bezüglich A auf B gibt:*

(5.4.9) *Jede separable vollständige $\mathfrak{S}$-Algebra B, in der A dicht liegt und die in A die $\mathfrak{T}$-Struktur induziert* ($\supseteq_{A^2}\mathfrak{T} = \supseteq_{A^2}\{S \cap A^2 \mid S \in \mathfrak{S}\}$!), *ist nach* (5.4.1) *und* (5.3.1) *simultanisomorph zur $\mathfrak{T}$-Hülle von A* ((5.4.6)!).

§ 6. Zur Theorie der $\mathfrak{T}$-Hüllen.

6.1. Ergänzungen zu 5.1. Für die weiteren Untersuchungen der topologischen Algebra bedürfen die Sätze, die in 5.1 den Ausgangspunkt bildeten, einer topologischen Ergänzung.

(6.1.1) *Ist f ein $\mathfrak{T}$-Homomorphismus der $\mathfrak{T}$-Algebra A, dann ist $g = (f a \mid f^= a)$ ein Simultanisomorphismus der $\mathfrak{T}/f^=$-Algebra $A/f^=$ auf die $f^{\subseteq} \in \mathfrak{T}$-Algebra $f^\sim A$.*

(6.1.2) *Sind in* (5.1.4) *die $F_\varkappa$ samt $F = \bigcap_\varkappa F_\varkappa$ mit einer Kongruenzbasis $\mathfrak{T}$ über A vertauschbar, dann ist das f gleichmäßig stetig, wenn die $A/F_\varkappa$ und A/F beziehentlich mit den $\mathfrak{T}/F_\varkappa$- und $\mathfrak{T}/F$-Topologien versehen werden und in $X = \times_\varkappa A/F_\varkappa$ irgendein $\mathfrak{L}$-Produkt der $\mathfrak{T}/F_\varkappa$-Topologien eingeführt wird.*

Beweise. (6.1.1): Nach (5.1.2) genügt es zu bemerken, daß wegen (2.4.3) und (2.3.3) $g^\sim(T/f^=) = \{(f a', f a'') \mid a''(f^= \circ T \circ f^=) a'\} = f^\sim \circ f^{\sim -} \circ f^\sim \circ T \circ f^{\sim -} \circ f^\sim \circ f^{\sim -} = f^\sim \circ T \circ f^{\sim -} = f^\sim T$ wird. (6.1.2): Bedeutet $(T/F_\varkappa)^\ni$ das Urbild von $T/F_\varkappa$ bei der $\varkappa$-Projektion von X auf $A/F_\varkappa$, dann ergibt sich für jedes $\Lambda \in \mathfrak{L}$ und $T \in \mathfrak{T}$ nach (2.4.3) $\bigcap_{\lambda \in \Lambda}(T/F_\lambda)^\ni \cap (f^\sim(A/F))^2 = \{((F_\varkappa a' \mid \varkappa), (F_\varkappa a'' \mid \varkappa)) \mid a''\,(\bigcap_{\lambda \in \Lambda}(F_\lambda \circ T \circ F_\lambda))\, a'\} \supseteq \{\cdots \mid a''(F \circ T \circ F)\, a'\} = \{\cdots \mid (F\, a'')\ (T/F)\ (F\, a')\} = f^\sim(T/F)$.

Im Beweise von (6.1.2) würde $=$ an Stelle von $\supseteq$ (Vertauschbarkeit!) $\bigcap_\lambda(F_\lambda \circ T) \subseteq (\bigcap_\varkappa F_\varkappa) \circ T$ bedeuten, und dies braucht auch dann nicht zu gelten, wenn $\Lambda = K$ und, wie hier, T mit allen $F_\varkappa$ und F vertauschbar ist[20]). Man kann also keineswegs erwarten, daß auch f^- gleichmäßig stetig wird.

6.2. Die Vertauschungssätze. Nach § 1 gibt es neben der Auswahl von Teilmengen zwei fundamentale Operationen zur Definition von Mengen, nämlich die Bildung von Mengenprodukten und Mengenquotienten. Dementsprechend untersucht man, sobald strukturierte Mengen betrachtet werden, sofort die Möglichkeiten, die Strukturen auf Teil-, Produkt- und Quotient-

[20]) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $K = \{1, 2\}$, $A/F_1 = \{\{1, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 4\}\}$, $A/F_2 = \{\{1, 6\}, \{2, 4\}, \{3, 5\}\}$, $A/T = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}\}$.

mengen zu übertragen, wie dies hier in § 2 für die Algebren und in § 3 für die kongruenztopologischen Räume geschehen ist. Aus den sich so ergebenden Fundamentaloperationen, aus vorgegebenen strukturierten Mengen neue zu bilden, lassen sich nun häufig weitere Operationen dieser Art ableiten, wie z. B. in § 5 die Bildung der $\mathfrak{T}$-Hülle einer $\mathfrak{T}$-Algebra. Mit dem Auftreten solcher neuen Operationen ergibt sich aber sofort die Frage, wie weit diese mit den Fundamentalen Operationen vertauschbar sind.

(6.2.1) *A sei eine Unteralgebra der separablen $\mathfrak{S}$-Algebra B und $\mathfrak{T} = \{S \cap A^2 | S \in \mathfrak{S}\}$. Dann ist $\bar{A}^{\mathfrak{T}^*}$ simultanisomorph zu $\bar{A}^{\mathfrak{S}^*} \leqq \bar{B}^{\mathfrak{S}^*}$* [21]).

Beweis. Die Hülle $\bar{A}^{\mathfrak{S}^*}$ von A in $\bar{B}^{\mathfrak{S}^*}$ ist nach (3.4.1) eine Unteralgebra von $\bar{B}^{\mathfrak{S}^*} \leqq \times_{S \in \mathfrak{S}} B/S$, also separabel und nach (4.2.2) auch vollständig, mithin nach (5.4.9) zu $\bar{A}^{\mathfrak{T}^*}$ simultanisomorph, denn nach Voraussetzung erzeugt $\mathfrak{T}$ trivial den gleichen Filter über A, wie die durch $\{S \cap (\bar{A}^{\mathfrak{S}^*})^2 | S \in \mathfrak{S}\}$ über A induzierte Kongruenzbasis.

(6.2.2) *Für beliebige Aufbaumengen $\mathfrak{L}$ von K ist das $\mathfrak{L}$-Produkt der vollständigen Hüllen der separablen $\mathfrak{T}_\varkappa$-Ω-Mengen $A_\varkappa$ mit $\varkappa \in K$ simultanisomorph zur vollständigen Hülle des $\mathfrak{L}$-Produktes der $\mathfrak{T}_\varkappa$-Algebren $A_\varkappa$.*

Beweis. Es bedeute $\varkappa^\varkappa$ bzw. $\varkappa^{\varkappa^*}$ die $\varkappa$-Projektion von $X = \times_\varkappa A_\varkappa$ bzw. von $B = \times_\varkappa \bar{A}_\varkappa^{\mathfrak{T}_\varkappa^*}$ auf $A_\varkappa$ bzw. auf $A_\varkappa^* = \bar{A}_\varkappa^{\mathfrak{T}_\varkappa^*}$, und es werde $T_\varkappa^\ni = \varkappa^{\varkappa\ni} T_\varkappa$ mit $\mathfrak{T}_\varkappa^\ni = \{T_\varkappa^\ni | T_\varkappa \in \mathfrak{T}_\varkappa\}$ und $T_\varkappa^{*\ni} = \varkappa^{\varkappa^*\ni} T_\varkappa^*$ mit $\mathfrak{T}_\varkappa^{*\ni} = \{T_\varkappa^{*\ni} | T_\varkappa^* \in \mathfrak{T}_\varkappa^*\}$ gesetzt. Wegen ((5.3.10)!) $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} T_\lambda^{*\ni} \cap X^2 = \bigcap_\lambda \{(x', x'') | (x'\lambda, x''\lambda) \in T_\lambda^* \cap A_\lambda^2 = T_\lambda\} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} T_\lambda^\ni$ induziert (3.3!) das in B gebildete $\mathfrak{L}$-Produkt der $\mathfrak{T}_\varkappa^*$-Strukturen der $A_\varkappa^*$ in X das $\mathfrak{L}$-Produkt der $\mathfrak{T}_\varkappa$-Strukturen der $A_\varkappa$, und wegen $\times_\varkappa T_\varkappa^* (b\varkappa) \cap X = \times_\varkappa (T_\varkappa^* (b\varkappa) \cap A_\varkappa) \neq \varnothing$ für alle $b \in B$ liegt ((3.3.1)!) X dicht in B, das nach (4.2.3) vollständig ist. Damit folgt die Behauptung aus (5.4.9).

Wesentlich schwieriger liegen die Verhältnisse bei der Quotientenbildung, und wir müssen uns sogar mit einer abgeschwächten Vertauschbarkeit zufrieden geben.

Für eine mit $\mathfrak{T}$ vertauschbare, abgeschlossene Kongruenz E über einer separablen $\mathfrak{T}$-Algebra A gilt:

(6.2.3) $f = \left((a^*(T/E) | T/E \in \mathfrak{T}/E) | a^* \in \bar{A}^{\mathfrak{T}^*}\right)$ *mit* $a^*(T/E) = \left((A/E)/(T/E) \cap \geqq_{A/E} (E a | a) \in (a^* \mathfrak{T})\right)^\bullet$ *ist ein gleichmäßig stetiger Homomorphismus von $A^* = \bar{A}^{\mathfrak{T}^*}$ in $(A/E)^* = \overline{(A/E)}^{(\mathfrak{T}\cdot E)^*}$ mit der Kongruenz $f^= = \bar{E}^{\mathfrak{T}^*}$ und mit $f a = E a$ für $a \in A$.*

(6.2.4) *$f^\sim A^* = (A/E)^*$ ist gleichbedeutend damit, daß zu jeder Filterbasis in A der Gestalt $\{(T \circ E) a_T | T \in \mathfrak{T}\}$ Elemente $a_T' \in (T \circ E) a_T$ existieren, derart, daß auch $\{T a_T' | T \in \mathfrak{T}\}$ eine Filterbasis über A wird.*

(6.2.5) *Ist $\bar{E}^{\mathfrak{T}^*}$ mit $\mathfrak{T}^*$ vertauschbar, dann ist $g = (f a^* | \bar{E}^{\mathfrak{T}^*} a^*)$ ein gleichmäßig stetiger Isomorphismus von $\bar{A}^{\mathfrak{T}^*}/\bar{E}^{\mathfrak{T}^*}$ in $\overline{(A/E)}^{(\mathfrak{T}/E)^*}$.*

Beweise. (6.2.3): α) $\mathfrak{T}/E$ ist nach 3.3 eine Kongruenzbasis über A/E und überdies separabel, denn wegen der Vertauschbarkeit und der Abgeschlossenheit von E ergibt sich mit (3.4.3) $\bigcap_{T \in \mathfrak{T}} (E \circ T \circ E) = \bigcap_T (T \circ E \circ T) = \bar{E}^{\mathfrak{T}} = E$, so daß $(E a'')\,(\bigcap_T T/E)\,(E a')$ wegen (2.4.3) und (1.3.8) in der Tat

[21]) Statt $A \leqq B$ auszuwählen und dann zu $\bar{A}^{\mathfrak{T}^*}$ zu vervollständigen, kann man also auch erst die $\mathfrak{S}$-Hülle von B bilden und dann $\bar{A}^{\mathfrak{S}^*}$ herausgreifen.

$E\,a' = E\,a''$ impliziert. Da $a^*\,\mathfrak{T}$ nach (5.4.8), (5.4.7) und (3.2.2) eine $\mathfrak{T}$-Filterbasis in A ist, also ((3.3.4)!) durch $(E\,a|\,a)$ auf eine $\mathfrak{T}/E$-Filterbasis in A/E abgebildet wird, existieren die $a^*(T/E)$, und wegen (3.2.3) und der Definition von f ist $\{(f\,a^*)\,(T/E)|\,T/E\}$ eine Filterbasis in A/E, und das bedeutet nach (5.4.7) $f\,a^* \in (A/E)^*$.

β) Für den weiteren Beweis benötigen wir zwei Formeln. Nach (3.3.4) gilt $(E\,a|\,a)^\sim(T\,a) = (T/E)\,(E\,a)$ und daher nach Definition von f

($\beta.\alpha$) $(E\,a|\,a)^\sim(a^*\,T) = (T/E)\,(E\,a_T) = (f\,a^*)\,(T/E)$ für alle $a_T \in a^*\,T$.

Hiernach bedeutet $(f\,a^{*\prime\prime})\,(T/E)^*\,(f\,a^{*\prime})$ wegen (5.3.10) und (2.4.3) $a''_T\,(E \circ T \circ E)\,a'_T$ oder wegen der Vertauschbarkeit von E mit $\mathfrak{T}$: $a''_T\,(T \circ E \circ T)\,a'_T$ für ein $a'_T \in a^{*\prime}\,T$ und ein $a''_T \in a^{*\prime\prime}\,T$, und das ist wegen (1.3.8) und (5.3.5) ersichtlich gleichwertig mit der Existenz von Elementen a' und a'' aus A, für die $a^{*\prime\prime}\,T = a''\,T$, $a''\,E\,a'$ und $a'\,T = a^{*\prime}\,T$ gilt, also wegen (5.3.10) gleichwertig mit $a^{*\prime\prime}(T^* \circ E \circ T^*)\,a^{*\prime}$. Also gilt

($\beta.\beta$) $$f^{\sim -}(T/E)^* = T^* \circ E \circ T^*.$$

γ) $a_\iota \in a_\iota^*\,T$ für alle ι impliziert nach (2.4.5) und (5.3.8) $\omega_\iota\,a_\iota \in \omega_\iota(a_\iota^*\,T) = (\omega_\iota\,a_\iota^*)\,T$, so daß wegen (2.1.3), (2.4.1) und ($\beta.\alpha$) $\big((\omega_\iota(f\,a_\iota^*))\,(T/E) = \omega_\iota\big((f\,a_\iota^*)\,(T/E)\big) = \omega_\iota\big((T/E)\,(E\,a_\iota)\big) = (T/E)\,\big(E(\omega_\iota\,a_\iota)\big) = \big(f(\omega_\iota\,a_\iota^*)\big)\,(T/E)$ und damit $\omega_\iota(f\,a_\iota^*) = f(\omega_\iota\,a_\iota^*)$. Wegen (5.3.5) oder (5.1.6) folgt aus ($\beta.\alpha$) $f\,a = \big((T/E)\,(E\,a)|\,T/E\big) = E\,a$. Mit (5.3.10) folgt aus ($\beta.\alpha$) die gleichmäßige Stetigkeit von f: $f^\sim T^* = \{(f\,a^{*\prime},\ f\,a^{*\prime\prime})|\,a^{*\prime}\,T = a^{*\prime\prime}\,T\} \leqq \{(f\,a^{*\prime},\ f\,a^{*\prime\prime})|\,(f\,a^{*\prime})\,(T/E) = (f\,a^{*\prime\prime})\,(T/E)\} = (T/E)^* \cap (f^\sim A^*)^2$. Durchschnittsbildung über alle T liefert auf der linken Seite von ($\beta.\beta$) wegen der Separabilität ((4.1.1)!) von $(\mathfrak{T}/E)^*$ sofort $f^{\sim -}I_{(A/E)^*} = f^=$ und auf der rechten Seite wegen (3.4.3) $\overline{E}^{\mathfrak{T}^*}$.

(6.2.4): Wegen (2.4.3) und der Vertauschbarkeit von E mit $\mathfrak{T}$ ergibt sich $(E\,a|\,a)^{\sim -}\big((T/E)\,(E\,a)\big) = \{a'|\,a'(T \circ E)\,a\} = (T \circ E)\,a$, so daß $\{(T \circ E)\,a_T|\,T\}$ als Urbild von $\{(T/E)\,(E\,a_T)|\,T/E\}$ bezüglich $(E\,a|\,a)$ wegen (5.4.7) genau dann eine Filterbasis in A ist, wenn $\big((T/E)\,(E\,a_T)|\,T/E\big) \in (A/E)^*$ gilt. Aus dieser Bemerkung folgt mit Hilfe von ($\beta.\alpha$) im Beweise von (6.2.3) und der Definition von f die Behauptung: Ist $\big((T/E)\,(E\,a_T)|\,T/E\big) \in (A/E)^*$, dann ist $\{(T \circ E)\,a_T|\,T\}$ eine Filterbasis in A, und wenn jetzt $a'_T \in (T \circ E)\,a_T$ für alle T existieren derart, daß $(T\,a'_T|\,T) \in A^*$ ((5.4.7)!), dann ergibt sich unter Beachtung von (1.3.8) und (2.4.3) sofort

(α) $$f(T\,a'_T|\,T) = \big((T/E)\,(E\,a'_T)|\,T/E\big) = \big((T/E)\,(E\,a_T)|\,T/E\big).$$

Ist umgekehrt $\{(T \circ E)\,a_T|\,T\}$ eine Filterbasis in A, so daß $\big((T/E)\,(E\,a_T)|\,T/E\big) \in (A/E)^*$ wird, und existiert jetzt ein $(T\,a'_T|\,T) \in A^*$, das (α) erfüllt, dann folgt nach (2.4.3) sofort $a'_T(T \circ E)\,a_T$ für alle $T \in \mathfrak{T}$.

(6.2.5): Wegen $f^= = \overline{E}^{\mathfrak{T}^*}$ folgt die Behauptung sofort aus (6.1.1), wenn beachtet wird, daß nach (6.2.3) die durch f in $f^\sim A^*$ induzierte Kongruenzstruktur (3.3!) zwar feiner (plus fin) ist, als die durch $(\mathfrak{T}/E)^*$ induzierte, dieser aber nicht notwendig gleich zu sein braucht, und daher zwar die gleichmäßige Stetigkeit von g bezüglich der zweiten Struktur erst recht besteht, die von g^- aber nicht mehr behauptet werden kann.

6.3. Die Hüllenzerlegung. Die Zerlegung f einer $\mathfrak{T}$-Algebra in Quotienten ist nach (6.1.2) topologisch mangelhaft: f braucht nicht gleichmäßig stetig zu sein. In (6.2.2) aber wird eine $\mathfrak{T}$-Hülle durch einen Simultanisomorphismus in $\mathfrak{T}_\varkappa$-Hüllen zerlegt. Diese Beobachtung legt es nahe, die Verhältnisse in (6.2.2) wie folgt abzuändern: Für alle $\varkappa \in K$ werde $A_\varkappa = A$ gesetzt, und an Stelle des Produktes $\times_\varkappa A_\varkappa = A^K$ mit der $\mathfrak{L}$-Produktstruktur der $\mathfrak{T}_\varkappa$ (die also durch $\bigcap_{\mathfrak{L},\varkappa} \mathfrak{T}_\varkappa$ definiert wird) soll A selbst betrachtet werden, und zwar mit der $\bigcap_{\mathfrak{L},\varkappa} \mathfrak{T}_\varkappa$-Struktur. Wir gelangen so zu den Sätzen (6.3.1) und (6.3.2), wenn wir noch sagen, die Kongruenzbasen $\mathfrak{T}_\lambda$ über A mit $\lambda \in \Lambda$ *kollidieren miteinander*, falls für jedes $(T_\lambda | \lambda \in \Lambda) \in \times_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{T}_\lambda$ die T_λ mit $\lambda \in \Lambda$ miteinander kollidieren (5.1!).

(6.3.1) *Ist $\mathfrak{L}$ eine Aufbaumenge von K und sind die $\mathfrak{T}_\varkappa$ mit $\varkappa \in K$ sowie $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{S}$ separable Kongruenzbasen über A, für die $\mathfrak{T} = \bigcap_{\mathfrak{L},\varkappa \in K} \mathfrak{T}_\varkappa \supseteq_{A^2} \mathfrak{S}$ gilt, dann ist*

$$f = \left((a^* T_\varkappa | T_\varkappa \in \mathfrak{T}_\varkappa) | \varkappa \in K\right) | a^* \in \bar{A}^{\mathfrak{S}^*})$$

ein gleichmäßig stetiger Homomorphismus von $A^* = \bar{A}^{\mathfrak{S}^*}$ in das $\mathfrak{L}$-Produkt $X = \times_{\varkappa \in K} \bar{A}^{\mathfrak{T}_\varkappa^*}$ der $\mathfrak{T}_\varkappa^*$-Algebren $A_\varkappa^* = \bar{A}^{\mathfrak{T}_\varkappa^*}$ mit $f\, a = (a|_\varkappa \varkappa)$ für alle $a \in A$ und $f^- = \bigcap_{T \in \mathfrak{T}} \overline{T}^{\mathfrak{S}^*}$.

Gilt sogar $\supseteq_{A^2} \mathfrak{T} = \supseteq_{A^2} \mathfrak{S}$, dann ist f ein Simultanisomorphismus.

(6.3.2) *Unter der Voraussetzung $\supseteq_{A^2} \mathfrak{T} = \supseteq_{A^2} \mathfrak{S}$ gilt $f^\sim \bar{A}^{\mathfrak{S}^*} = \times_{\varkappa \in K} \bar{A}^{\mathfrak{T}_\varkappa^*}$ genau dann, wenn für jedes $\Lambda \in \mathfrak{L}$ die $\mathfrak{T}_\lambda$ mit $\lambda \in \Lambda$ miteinander kollidieren.*

Beweise. (6.3.1): Da nach Voraussetzung jedes $T_\varkappa \in \mathfrak{T}_\varkappa$ ein $S \in \mathfrak{S}$ enthält, ist $a^*\, \mathfrak{T}_\varkappa$ wegen (5.3.6) in $\supseteq_A a^*\, \mathfrak{S}$ enthalten und damit nach (3.2.3) eine Filterbasis in A, so daß wegen (5.4.7) in der Tat $(f\, a^*)\, \varkappa \in A_\varkappa^*$ gilt. Nach Definition von f wird mit (5.3.5) und (5.1.6) $f\, a = \left((a\, T_\varkappa | T_\varkappa) | \varkappa\right) = (a|_\varkappa \varkappa)$, und wegen (2.1.3) und (5.3.8) ist $f^\sim$ zulässig. Schließlich folgt aus der Definition von f mit (5.3.10), wenn $\overline{T}_\varkappa^{\mathfrak{T}_\varkappa^*, \ni}$ das Urbild von $\overline{T}_\varkappa^{\mathfrak{T}_\varkappa^*}$ bei der $\varkappa$-Projektion von X auf $A_\varkappa^*$ bedeutet,

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} f^{\sim -}\, \overline{T}_\lambda^{\mathfrak{T}_\lambda^*, \ni} = \bigcap_\lambda \{(a^*, a^{*\prime}) | \left((f\, a^*)\, \lambda\right) T_\lambda = \left((f a^{*\prime})\, \lambda\right) T_\lambda\}$$
$$= \bigcap_\lambda \{(a^*, a^{*\prime}) | a^*\, T_\lambda = a^{*\prime}\, T_\lambda\} = \bigcap_\lambda \overline{T}_\lambda^{\mathfrak{S}^*}, \text{ also mit (5.3.11)}$$

$$(\alpha) \qquad f^{\sim -} \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \overline{T}_\lambda^{\mathfrak{T}_\lambda^*, \ni} = \overline{\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} T_\lambda\right)}^{\mathfrak{S}^*}.$$

Unterwirft man (α) der Abbildung f^ξ, dann erhält man sofort die gleichmäßige Stetigkeit von f. Und bildet man auf beiden Seiten von (α) den Durchschnitt über alle $(T_\lambda | \lambda \in \Lambda) \in \times_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{T}_\lambda$ für alle $\Lambda \in \mathfrak{L}$, dann ergibt sich wegen der Separabilität des $\mathfrak{L}$-Produkts der separablen $\mathfrak{T}_\varkappa^*$-Strukturen (3.3!) $f^{--} = f^{\sim -} I_X = \bigcap_{T \in \mathfrak{T}} \overline{T}^{\mathfrak{S}^*}$, wegen der Separabilität von $\mathfrak{S}^*$ ((4.1.1)!) also $f^{--} = I$, wenn $\supseteq_{A^2} \mathfrak{T} = \supseteq_{A^2} \mathfrak{S}$ gilt, und in diesem Falle behauptet (α) wegen $f^{\sim -} = f^{- \sim}$ ((1.3.4)!) auch die gleichmäßige Stetigkeit von f^-.

(6.3.2): α) Die Kollision der $\mathfrak{T}_\lambda$ mit $\lambda \in \Lambda$ bedeutet $\bigcap_\lambda (T_\lambda\, a_\lambda) \neq \varnothing$, wie auch die $T_\lambda \in \mathfrak{T}_\lambda$ und die $a_\lambda \in A$ gewählt werden. Das ist aber ersichtlich gleichwertig damit, daß $\bigcap_\lambda (a_\lambda^*\, T_\lambda) \neq \varnothing$ bei beliebiger Wahl der $T_\lambda \in \mathfrak{T}_\lambda$ und der $a_\lambda^* \in A_\lambda^*$ gilt, denn für $a_\lambda^* = a_\lambda$ ergibt sich wegen (5.3.5) wieder die erste Aussage. Daher ist bei Beachtung der Filterbasiseigenschaft der $a_\varkappa^*\, \mathfrak{T}_\varkappa$ ((5.4.7)

und (5.4.8)!) wegen der Beliebigkeit von $A \in \mathfrak{A}$ die Kollisionsbedingung gleichbedeutend mit (3.1!):

($\alpha.\alpha$) $\bigcap_{\mathfrak{L},\varkappa\in K} a_\varkappa^* \mathfrak{T}_\varkappa$ ist für jedes $(a_\varkappa^* | \varkappa) \in \times_\varkappa A_\varkappa^*$ eine Filterbasis in A.

β) ($\alpha.\alpha$) ist notwendig: $f a^* = (a_\varkappa^* | \varkappa)$ impliziert mit (5.3.7) und (5.3.6) nach Definition von f: $\bigcap_\lambda a_\lambda^* T_\lambda = \bigcap_\lambda (f a^*)\, \lambda)\, T_\lambda = \bigcap_\lambda a^* T_\lambda = a^* \bigcap_\lambda T_\lambda \in a^* \mathfrak{T} \leqq \geqq_A a^* \mathfrak{S}$, und das liefert wegen der Filterbasiseigenschaft von $a^* \mathfrak{S}$ ((5.4.7)!) gerade ($\alpha.\alpha$). ($\alpha.\alpha$) ist hinreichend: Da jedes S ein $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} T_\lambda$ enthält und nach ($\alpha.\alpha$) zu beliebig vorgegebenem $(a_\varkappa^* | \varkappa) \in X$ ein $a \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda^* T_\lambda$ existiert, gilt ((1.3.8)!) $S\, a \geqq \bigcap_\lambda T_\lambda a = \bigcap_\lambda a_\lambda^* T_\lambda$, so daß der von $\bigcap_{\mathfrak{L},\varkappa} a_\varkappa^* \mathfrak{T}_\varkappa$ in A erzeugte Filter eine Klasse eines jeden $S \in \mathfrak{S}$ enthält. Daher ist nach (3.2.3) und (5.4.7) $a^* = \big((A/S \cap \geqq_A \bigcap_{\mathfrak{L},\varkappa} a_\varkappa^* \mathfrak{T}_\varkappa)^\bullet \,|\, S\big) \in A^*$. Nun enthält nach Voraussetzung jedes $T_\varkappa \in \mathfrak{T}_\varkappa$ ein $S \in \mathfrak{S}$, so daß wegen (5.3.6) $a^* S \leqq a^* T_\varkappa$ gilt und damit nach Definition von a^*: $a^* T_\varkappa \in \geqq_A \bigcap_{\mathfrak{L},\varkappa} a_\varkappa^* \mathfrak{T}_\varkappa$, d.h. aber ((1.3.8)!) $a^* T_\varkappa = a_\varkappa^* T_\varkappa$, und nach Definition von f folgt $f a^* = \big((a_\varkappa^* T_\varkappa | T_\varkappa) | \varkappa\big) = (a_\varkappa^* | \varkappa)$.

Wir nennen den in (6.3.1) auftretenden Simultanisomorphismus f eine *Hüllenzerlegung über A*. (Diese braucht weder eine echte noch eine unechte Zerlegung von A^* im Sinne von 5.1 zu sein.) (6.3.2) nennt also eine genaue Bedingung dafür, daß eine Hüllenzerlegung über A echte Zerlegung einer Hülle von A ist.

Abschließend wollen wir noch, gestützt auf (6.3.1), eine bemerkenswerte, von ZARISKI [1] bei gewissen Idealtopologien benutzte Schlußweise allgemein darstellen. Nach (6.3.1) ist f für $K = \{1\}$ umkehrbar, genau wenn $\bigcap_{T_1} \overline{T_1}^{\mathfrak{S}^*} = I_{A^*}$. Kommt $\mathfrak{T}_1$ aber unter Kongruenzbasen $\mathfrak{T}_\varkappa$ vor, die der scharfen Bedingung in (6.3.1) genügen, dann kann unter günstigen Umständen die Umkehrbarkeit von f auch mit Hilfe einer Hüllenzerlegung erschlossen werden:

(6.3.3) *Es gelten die Voraussetzungen von* (6.3.1) *einschließlich der scharfen Bedingung* $\geqq_{A^2} \mathfrak{T} = \geqq_{A^2} \mathfrak{S}$, *und es sei* $K = \{1, 2, \ldots\}$. *Außerdem seien die weiteren separablen Kongruenzbasen* $\mathfrak{T}_{\varkappa,\varkappa+1}$ ($\varkappa \in K$) *über A gegeben mit* $\mathfrak{T}_{\varkappa,\varkappa+1} \leqq \geqq_{A^2} \mathfrak{T}_\varkappa \cap \geqq_{A^2} \mathfrak{T}_{\varkappa+1}$. *Sind dann die nach* (6.3.1) ($K = \{1\}$!) *gleichmäßig stetigen Homomorphismen*

$$h_\varkappa = \big((a_{\varkappa+1}^* T_{\varkappa,\varkappa+1} | T_{\varkappa,\varkappa+1}) | a_{\varkappa+1}^* \in A_{\varkappa+1}^*\big)$$

umkehrbar, so auch der gleichmäßig stetige Homomorphismus

$$f_1 = \big((a^* T_1 | T_1) | a^* \in A^*\big).$$

Beweis. Es sei $g_\varkappa = \big((a_\varkappa^* T_{\varkappa,\varkappa+1} | T_{\varkappa,\varkappa+1}) | a_\varkappa^* \in A_\varkappa^*\big)$ und $f_\varkappa = \big((a^* T_\varkappa | T_\varkappa) | a^* \in A^*\big)$, so daß $f = \big((f_\varkappa a^* | \varkappa) | a^*\big)$ wird. Damit ergibt sich ((5.3.6)!) $(g_\varkappa (f_\varkappa a^*))\, T_{\varkappa,\varkappa+1} = (a^* T_\varkappa | T_\varkappa)\, T_{\varkappa,\varkappa-1} \in \geqq_A (a^* T_\varkappa | T_\varkappa)\, \mathfrak{T}_\varkappa = \geqq_A a^* \mathfrak{T}_\varkappa \leqq \geqq_A a^* \mathfrak{S}$ und $(h_\varkappa (f_{\varkappa-1} a^*))\, T_{\varkappa,\varkappa+1} = (a^* T_{\varkappa+1} | T_{\varkappa+1})\, T_{\varkappa,\varkappa-1} \in \geqq_A a^* \mathfrak{T}_{\varkappa-1} \leqq \geqq_A a^* \mathfrak{S}$, so daß ((1.3.8)!) $(g_\varkappa (f_\varkappa a^*))\, T_{\varkappa,\varkappa+1} = (h_\varkappa (f_{\varkappa-1} a^*))\, T_{\varkappa,\varkappa-1}$, also $g_\varkappa \circ f_\varkappa = h_\varkappa \circ f_{\varkappa-1}$ oder $h_\varkappa^- \circ g_\varkappa \circ f_\varkappa = f_{\varkappa+1}$. Damit impliziert $f_1 a^{*\prime} = f_1 a^{*\prime\prime}$ sofort $f_\varkappa a^{*\prime} = f_\varkappa a^{*\prime\prime}$ für alle $\varkappa$, also $f a^{*\prime} = f a^{*\prime\prime}$ und damit wegen (6.3.1) $a^{*\prime} = a^{*\prime\prime}$.

§ 7. Gruppen und Ringe mit allgemeinen Operatoren.

7.1. Produkte, Quotienten und Hüllen von Gruppen und Ringen. Ist die Ω-Menge A eine additiv geschriebene (aber nicht notwendig kommutative Gruppe bzw. ein Ring, dann nennen wir die $(\{+\} \cup \Omega)$-Menge

bzw. die $(\{+,\cdot\}\cup\Omega)$-Menge eine *Ω-Gruppe* bzw. einen *Ω-Ring*[22]). Zunächst haben wir festzustellen, ob Produkte, Quotienten und $\mathfrak{T}$-Hüllen von Gruppen und Ringen wieder Gruppen und Ringe sind.

(7.1.1) *Das Produkt $\times_{\varkappa\in K}A_\varkappa$ der Ω-Gruppen $A_\varkappa$ ist wieder eine Ω-Gruppe. Sie besitzt das Nullelement $(0|_\varkappa\,\varkappa\in K)$ und es gilt $(a'_\varkappa|\varkappa)+(a''_\varkappa|\varkappa)=(a'_\varkappa+a''_\varkappa|\varkappa)$ und $-(a_\varkappa|\varkappa)=(-a_\varkappa|\varkappa)$. Sind die $A_\varkappa$ sogar Ω-Ringe, dann wird auch ihr Produkt ein solcher mit $(a'_\varkappa|\varkappa)\cdot(a''_\varkappa|\varkappa)=(a'_\varkappa\cdot a''_\varkappa|\varkappa)$.*

(7.1.2) *Der Quotient A/E einer Ω-Gruppe modulo einer Kongruenz E ist wieder eine Ω-Gruppe. Sie besitzt das Nullelement $E\,0$ und es gilt $E\,a'+^{\in}E\,a''=E\,a'+E\,a''=E(a'+a'')$ und $-^{\in}(E\,a)=-(E\,a)=E(-a)$. Ist A sogar ein Ring, dann auch A/E mit $E\,a'\cdot^{\in}E\,a''\leqq E\,a'\cdot E\,a''=E(a'\cdot a'')$.*

(7.1.3) *Die $\mathfrak{T}$-Hülle einer separablen $\mathfrak{T}$-Ω-Gruppe ist wieder eine Ω-Gruppe mit $a^{*\prime}+a^{*\prime\prime}=(a^{*\prime}\,T+a^{*\prime\prime}\,T|\,T)$ und $-a^*=(-(a^*\,T)|\,T)$. Ist A sogar ein Ω-Ring, dann auch $\bar{A}^{\mathfrak{T}^*}$ mit $a^{*\prime}\cdot a^{*\prime\prime}=(a^{*\prime}\,T\cdot a^{*\prime\prime}\,T|\,T)$.*

Beweise. (7.1.1): Zunächst ist in (2.1.3) $\omega=+$ und $\omega=\cdot$ zu setzen. Der Rest ist trivial. (7.1.2): Wegen der $\{+\}$-Zulässigkeit von E ergibt sich $E(a'+a'')=\{a|\,a\,E\,(a'+a'')\}=\{a|\,a-a''\in E\,a'\}\leqq E\,a'+^{\in}E\,a''$ und $E\,(-a)=\{a'|\,a'E(-a)\}=\{a'|\,(a+a'-a')\,E(a-a-a')\}=\{a'|\,-a'\in E\,a\}=-^{\in}(E\,a)$. Der Rest ist wegen (2.4.1) und (2.4.5) trivial. (7.1.3): Nach (5.2.2) und (3.4.1) ist $A^*=\bar{A}^{\mathfrak{T}^*_{\mathfrak{T}}}=\bar{A}^{\mathfrak{T}^*}$ (5.4!) eine $(\{+\}\cup\Omega)$- bzw. $(\{+,\cdot\}\cup\Omega)$-Teilmenge der Ω-Gruppe bzw. des Ω-Ringes $\times_{T\in\mathfrak{T}}A/T$ ((7.1.2) und (7.1.1)!), in der bzw. in dem die angegebenen Formeln nach (2.1.3) gelten. Nach (5.4.7) brauchen wir also nur noch zu zeigen, daß mit $\{a^*\,T|\,T\}$ auch $\{-(a^*\,T)|\,T\}$ eine Filterbasis in A ist. Nun, aus $a^*\,T\leqq a^*\,T'\cap a^*\,T''$ folgt mit (7.1.2) $-(a^*\,T)=-^{\in}(a^*\,T)\leqq-^{\in}(a^*\,T')\cap-^{\in}(a^*\,T'')=-(a^*\,T')\cap-(a^*\,T'')$.

Wegen (7.1.2) wird in Gruppen und Ringen allgemein

$$U'+^{\in}U''=U'+U''\quad\text{und}\quad-^{\in}U=-U \tag{7.1.4}$$

für beliebige Teilmengen U, U', U'' notiert.

7.2. Die Kongruenzkerne. Gruppen und Ringe zeichnen sich gegenüber den allgemeinen Algebren durch das Auftreten der zweistelligen Operatoren Addition und Multiplikation aus, die gewissen Axiomen, nämlich der Assoziativität, der Distributivität usw. unterworfen sind. Nach 7.1 übertragen sich diese Axiome auf Produkte, Quotienten und Hüllen. Hier zeigt sich aber bei der Quotientenbildung eine Besonderheit der Addition ($E\,a'+^{\in}E\,a''=E\,a'+E\,a''$), die, wie ihr Beweis erkennen läßt, durch die Auflösbarkeit der Addition bedingt ist. Die allgemeinen, keinen weiteren Voraussetzungen unterliegenden Ringe erscheinen nun als ein nicht weiter interessierender Spezialfall der Ω-Gruppen, bei denen uns jetzt in erster Linie natürlich die Kongruenzen interessieren, die sich in der Tat erheblich von den Kongruenzen

[22]) Nimmt man auch noch die Inversenbildung „—" und bei Ringen außerdem noch die Rechts- oder die Linksmultiplikationen $(a'\cdot a|\,a')$ oder $(a\cdot a'|\,a')$ (das sind also die partiellen Abbildungen der Multiplikation) oder beide im Sinne von 2.1 „zu den Operatoren hinzu", dann sind die zulässigen Teilmengen genau die Ω-Untergruppen bzw. die Ω-Ideale von A.

der beliebigen Algebren unterscheiden. Zuvor definieren wir noch: $E\,0$ heiße der *Kern der Kongruenz* E.

(7.2.1) *Die Kongruenzen über einer Ω-Gruppe A sind Ω-Untergruppen von A^2 und als Kongruenzen sämtlich miteinander vertauschbar, so daß nach* (2.2.4) $E' \circ E''$ *die kleinste E' und E'' enthaltende Kongruenz ist.*

(7.2.2) $\mathfrak{a} \leq A$ *ist genau dann Kern einer Kongruenz über A, wenn $\mathfrak{a}$ eine invariante Untergruppe von A ist und für alle $\omega \in \Omega$ aus $a_\iota'' - a_\iota' \in \mathfrak{a}$ $(\iota \in I_\omega)$ stets $\omega_\iota a_\iota'' - \omega_\iota a_\iota' \in \mathfrak{a}$ folgt*[23]. *Die Kongruenzkerne in A bilden also bezüglich der Ordnung „$\leq$" einen vollständigen Verband mit* $\inf_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}} \mathfrak{a} = \bigcap_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}} \mathfrak{a}$ *für jede Menge $\mathfrak{A}$ von Kongruenzkernen $\mathfrak{a}$ in A.*

(7.2.3) $(E\,0 \mid E)$ *ist ein Isomorphismus des vollständigen Verbandes der Kongruenzen über A auf den vollständigen Verband ihrer Kerne in A. Dabei gilt*

$$E = \{(a', a'') \mid a'' - a' \in E\,0\} \quad \text{und} \quad (E' \circ E'')\,0 = E'\,0 + E''\,0.$$

(7.2.4) *Ist $\mathfrak{T}$ eine separable Kongruenzbasis über A, dann ist mit E auch $\overline{E}^{\mathfrak{T}}$ eine Kongruenz über A, und es gilt*

$$\overline{E}^{\mathfrak{T}}\,0 = \overline{(E\,0)}^{\mathfrak{T}} = \bigcap_{T \in \mathfrak{T}} (T\,0 + E\,0)$$

(vgl. auch HALL [1]*), so daß insbesondere die Hüllen in A von Kongruenzkernen in A wieder Kongruenzkerne in A und genau die Kerne über A abgeschlossener Kongruenzen in A abgeschlossen sind* ((7.2.3)!).

Beweise. (7.2.1): $(a', a'') \in E$, also $(a'', a') \in E$, impliziert $-(a', a'') = (-a', -a'') = (-a' + a'' - a'', -a' + a' - a'') \in E$. $a'' E'' a\, E' a'$ impliziert $a'' E' (a' - a + a'') E'' a'$, so daß $E'' \circ E' \leq E' \circ E''$. (7.2.2): $\{a', a''\} \leq E\,0$ impliziert $a'' E\, a'$ und damit $a'' - a' \in E\,0$, so daß $E\,0$ eine Untergruppe ist, und zwar eine invariante, denn $a E 0$ impliziert sofort $(a' + a - a')\, E (a' + 0 - a')$. Die Notwendigkeit des zweiten Teils der Bedingung für ein $E\,0$ folgt trivial aus der Zulässigkeit von E. Umgekehrt folgt sofort die Ω-Zulässigkeit von $E = \{(a', a'') \mid a'' - a' \in \mathfrak{a}\}$. Da trivial $E\,0 = \mathfrak{a}$ wird, braucht E nur noch als $\{+\}$-zulässige Äquivalenz nachgewiesen zu werden. Die Äquivalenzeigenschaft von E folgt aus der Gruppeneigenschaft von $\mathfrak{a}$[24]: trivial ist $I \leq E = E^{-1}$, und $\{a'' - a', a''' - a''\} \leq \mathfrak{a}$ impliziert $a''' - a' \in \mathfrak{a}$. Schließlich impliziert $\{(a_1', a_1''), (a_2', a_2'')\} \leq E$, also $a_1'' - a_1' \in \mathfrak{a}$ und $a_2'' - a_2' \in \mathfrak{a}$, was wegen der Invarianz von $\mathfrak{a}$ durch $-a_2' + a_2'' - a_2' + a_2' = -a_2' + a_2'' \in \mathfrak{a}$ ersetzt werden kann, $a_1'' - a_1' - a_2' + a_2'' \in \mathfrak{a}$ und damit wieder wegen der Invarianz von $\mathfrak{a}$: $a_2'' + a_1'' - a_1' - a_2' \in \mathfrak{a}$, also $(a_2' + a_1',\ a_2'' + a_1'') \in E$. (7.2.3): Die Gleichwertigkeit von $a'' E\, a'$ mit $a'' - a' \in E\,0$ ist wegen der $\{+\}$-Zulässigkeit von E trivial. Mithin ist $(E\,0 \mid E)$ in der Tat umkehrbar und $E \leq E'$ äquivalent mit $E\,0 \leq E'\,0$. Weiter wird, da $E' \circ E''$ nach (7.2.1) eine Kongruenz ist, $(E' \circ E'')\,0 = \{a' \mid a'\, E'\, a\, E''\, 0$ *für ein* $a\} =$

[23]) $\mathfrak{a}$ ist also sicher $\{\omega\}$-zulässig, wenn $\omega_\iota\, 0 = 0$ gilt. Ist A ein Ring, dann ist $\mathfrak{a}$ ein (zweiseitiges) Ideal: $a - 0 \in \mathfrak{a}$ und $a' - a' \in \mathfrak{a}$ implizieren $a' \cdot a - a' \cdot 0 \in \mathfrak{a}$.

[24]) Die Untergruppen $\mathfrak{a}$ definieren so rechtsmonotone Äquivalenzen E, für die also $a'' E\, a'$ stets $(a'' + a)\, E (a' + a)$ impliziert. Entsprechend definiert jede Teilmenge von A rechts- und auch linksmonotone Relationen über A, mit deren die 0 enthaltenden Klassen sie dann zusammenfallen. (7.2.1) verallgemeinernd läßt sich zeigen, daß genau die rechtsmonotonen Relationen mit allen linksmonotonen vertauschbar sind und umgekehrt.

$\{a' \mid a' - a \in E'0$ *für ein* $a \in E''0\} \subseteq E'0 + E''0 = \{a' + a'' \mid a' E'0 E''(-a'')\} \subseteq \{a' + a'' \mid a'(E' \circ E'')(-a'')\} = \{a' + a'' \mid (a' + a'')(E' \circ E'')0\} = (E' \circ E'')0$.

(7.2.4): Dies folgt wegen (7.2.1) und (7.2.3) sofort aus (3.4.4) und (3.4.3).

Die Kongruenzen über Ω-Gruppen sind also im wesentlichen ausgezeichnet durch ihre gegenseitige Vertauschbarkeit und durch die Korrespondenz mit ihren Kernen. Diese Eigenschaften sind auch entscheidend für die folgende Verallgemeinerung der beiden ersten Behauptungen von (7.2.4).

(7.2.5) *Ist E eine Kongruenz über der $\mathfrak{T}$-Ω-Gruppe A, dann ist $\overline{E}^{\mathfrak{T}^*}$ eine Kongruenz über $A^* = \overline{A}^{\mathfrak{T}^*}$ und es gilt $\overline{E}^{\mathfrak{T}^*}0 = (\overline{E0})^{\mathfrak{T}^*}$* [25]).

Beweis. Nach (7.2.4), (7.2.1) und (6.2.3) ist $(\overline{E}^{\mathfrak{T}})^{\mathfrak{T}^*} = \overline{E}^{\mathfrak{T}^*}$ eine Kongruenz über A^*. Wegen $E \subseteq \overline{E}^{\mathfrak{T}^*}$ und der Abgeschlossenheit von $\overline{E}^{\mathfrak{T}^*}0$ auf Grund von (7.2.4) ist $(\overline{E0})^{\mathfrak{T}^*} \subseteq \overline{E}^{\mathfrak{T}^*}0$ trivial. Existiert eine Kongruenz F über A^* mit $(\overline{E0})^{\mathfrak{T}^*} = F0$, so daß $E0 \subseteq F0 \subseteq \overline{E}^{\mathfrak{T}^*}0$, dann folgt nach (7.2.3) $E \subseteq F \subseteq \overline{E}^{\mathfrak{T}^*}$, also, da F nach (7.2.4) abgeschlossen ist, $\overline{E}^{\mathfrak{T}^*} = F$. Wir haben also nur noch zu zeigen, daß $(\overline{E0})^{\mathfrak{T}^*}$ in A^* Kongruenzkern ist, also eine der Bedingungen von (7.2.2) genügende invariante Untergruppe von A^*.

Aus $\{a^{*\prime}, a^{*\prime\prime}\} \subseteq (\overline{E0})^{\mathfrak{T}^*}$ und $a^* \in A^*$ folgt für jedes $T \in \mathfrak{T}$ wegen (5.3.12) die Existenz von $a'_T \in T^* a^{*\prime} \cap E0 = a^{*\prime} T \cap E0$, $a''_T \in a^{*\prime\prime} T \cap E0$ und von $a_T \in a^* T$. Wegen der Gruppeneigenschaft von $E0$, (7.1.2) und (7.1.3) ergibt sich damit $a'_T - a''_T \in (a^{*\prime} T - a^{*\prime\prime} T) \cap E0 = T^*(a^{*\prime} - a^{*\prime\prime}) \cap E0$, also $a^{*\prime} - a^{*\prime\prime} \in (\overline{E0})^{\mathfrak{T}^*}$, und wegen der Invarianz auf analoge Weise $a_T + a'_T - a_T \in T^*(a^* + a^{*\prime} - a^*) \cap E0$, also $a^* + a^{*\prime} - a^* \in (\overline{E0})^{\mathfrak{T}^*}$. Zum Nachweis der zweiten Bedingung von (7.2.2) sei jetzt $a_\iota^{*\prime\prime} - a_\iota^{*\prime} \in (\overline{E0})^{\mathfrak{T}^*}$ für alle $\iota \in I_\omega$, so daß zu jedem $T \in \mathfrak{T}$ und $\iota \in I_\omega$ wegen (5.3.12) und (7.1.3) ein $a_{\iota,T} \in (a_\iota^{*\prime\prime} T - a_\iota^{*\prime} T) \cap E0$ existiert und damit wegen (7.1.2) ein $a'_{\iota,T} \in a_\iota^{*\prime} T$ und ein $a''_{\iota,T} \in a_\iota^{*\prime\prime} T$ mit $a_{\iota,T} = a''_{\iota,T} - a'_{\iota,T}$. Somit ergibt sich ((1.3.8)!), da $E0$ die Bedingungen von (7.2.2) erfüllt, nach (7.1.2), (2.4.1), (2.1.3), (7.1.3) und (5.3.12) $\omega_\iota a''_{\iota,T} - \omega_\iota a'_{\iota,T} \in T(\omega_\iota a''_{\iota,T} - \omega_\iota a'_{\iota,T}) \cap E0 = (\omega_\iota(a_\iota^{*\prime\prime} T) - \omega_\iota(a_\iota^{*\prime} T)) \cap E0 = (\omega_\iota a_\iota^{*\prime\prime} - \omega_\iota a_\iota^{*\prime}) T \cap E0 = T^*(\omega_\iota a_\iota^{*\prime\prime} - \omega_\iota a_\iota^{*\prime}) \cap E0$, also $\omega_\iota a_\iota^{*\prime\prime} - \omega_\iota a_\iota^{*\prime} \in (\overline{E0})^{\mathfrak{T}^*}$.

Literatur.

Birkhoff, G. [*1*]: Lattice Theory, S. VII. New York 1948. — Bourbaki, N. [*1*]: Topologie générale, Kap. I—II. Paris 1951. — Hall, M. [*1*]: A topology for free groups and related groups, Theorem 3.3. Ann. Math. **52** (1950). — Jacobson, N. [*1*]: Lectures in Abstract Algebra, S. 3. New York 1951. — Krull, W. [*1*]: Charakteren- und Homomorphismentopologie, demnächst in den Veröffentlichungen des Istituto Jorge Juan, Madrid. — [*2*]: Subdirekte Summendarstellungen von Integritätsbereichen. Math. Z. **52**, 810—826 (1950). — Lefschetz, S. [*1*]: Algebraic Topology. New York 1942. — Schmidt, J. [*1*]: Über die Rolle der transfiniten Schlußweisen in einer allgemeinen Idealtheorie, § 2. Math. Nachr. **7** (1952). — Zariski, O. [*1*]: Semi local rings, Theorem 9 (Beweis). Summa Bras. Mat. Bd. I, H. 8.

[25]) Da $\overline{E}^{\mathfrak{T}^*} \cap A^2 = \overline{E}^{\mathfrak{T}}$ ((5.3.12) impliziert mit (5.3.5) $T^* a \cap A = Ta$!) und damit $(\overline{E0})^{\mathfrak{T}} = (\overline{E0})^{\mathfrak{T}^*} \cap A = \overline{E}^{\mathfrak{T}^*}0 \cap A = (\overline{E}^{\mathfrak{T}^*} \cap A^2)0 = \overline{E}^{\mathfrak{T}}0$ gilt, folgen in der Tat rückwärts wieder die ersten Behauptungen von (7.2.4).

Bonn, Mathematisches Seminar der Universität.

(Eingegangen am 11. Mai 1954.)

Hahn, W.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 488—494 (1954)

Über einige Grenzwertbeziehungen bei unendlichen Produkten.

Von
Wolfgang Hahn.

In der Analysis der speziellen Funktionen treten öfter Produkte der Gestalt

$$P(z,\beta,q)=\prod_{j=0}^{\infty}\frac{1-zq^j}{1-zq^{j+\beta}} \tag{1}$$

auf. Darin ist z eine komplexe Veränderliche, β eine reelle oder komplexe Zahl und q ein Parameter, der meist zwischen Null und Eins liegend angenommen wird. Von diesen Produkten ist die Limesformel

$$\lim_{q\to 1}P(z,\beta,q)=(1-z)^{\beta} \tag{2}$$

seit langem bekannt. Man beweist sie mit Hilfe der für $|z|<1$ gültigen Potenzreihenentwicklung[1])

$$\frac{1}{P(z,\beta,q)}=1+\frac{1-q^{\beta}}{1-q}z+\frac{(1-q^{\beta})(1-q^{1+\beta})}{(1-q)(1-q^2)}z^2+\cdots. \tag{3}$$

Die Formel (2) ist Spezialfall einer viel allgemeineren Beziehung, die im folgenden bewiesen werden soll:

Es sei die Funktion $f(z)$ in einer Umgebung des Nullpunkts analytisch, und es sei $f(0)=1$. Der Parameter q sei auf einen im Inneren des Einheitskreises gelegenen Teil eines Winkelraums beschränkt, dessen Spitze der Punkt $q=1$ und dessen Öffnung kleiner als π ist:

$$q=1-p\,e^{i\varphi}\quad\left(0<p\leq\sin\varepsilon;\ +\varepsilon-\frac{\pi}{2}\leq\varphi\leq+\frac{\pi}{2}-\varepsilon;\ \varepsilon>0\right) \tag{4}$$

β sei eine beliebige reelle oder komplexe Zahl. Dann gilt

$$\lim_{q\to 1}\prod_{j=0}^{\infty}\frac{f(zq^j)}{f(zq^{j+\beta})}=(f(z))^{\beta} \tag{5}$$

überall dort, wo die beiden Seiten dieser Formel analytische Funktionen von z sind, also insbesondere in dem durch (7) bestimmten Kreis $|z|<R$. Unter den Potenzen mit dem Exponenten β sind die Hauptwerte zu verstehen.

[1]) Vgl. z. B. Heine, E.: Handbuch der Theorie der Kugelfunktionen, Bd. I, S. 97 ff. Berlin 1878. Der Nachweis, daß man in (3) den Grenzübergang $q\to 1$ gliedweise vollziehen darf, wird dort nicht erbracht.

Es sei

$$f(z) = 1 + z\,g(z) \tag{6}$$

und z zunächst in einem Kreis gelegen, innerhalb dessen $g(z)$ analytisch und $|z\,g(z)|$ kleiner als eine feste Zahl $a<1$ ist:

$$|z\,g(z)| < a < 1 \quad \text{für} \quad |z| < R. \tag{7}$$

Wir beweisen eine *Hilfsformel*. Es sei t eine natürliche Zahl, $Re\,\beta > 0$ und $|\beta| < B$. Dann gilt in dem durch (4) erklärten Bereich

$$\frac{1-q^{\beta t}}{1-q^t} = \beta + h(\beta, t, q), \tag{8}$$

wobei die Funktion $h(\beta, t, q)$ der Abschätzung

$$|h(\beta, t, q)| < t\,|1-q|\,M$$

genügt; M ist eine von β, t und q unabhängige Konstante.

Im Falle $t=1$ ist mit $q=1-x$

$$\frac{1-q^\beta}{1-q} = \beta - x\,k(x), \quad k(x) = \sum_{r=2}^{\infty} \binom{\beta}{r} (-1)^r\, x^{r-2}.$$

Wir wählen eine Zahl c zwischen Null und 1. Dann ist für $|x| \leq c$

$$|k(x)| \leq \sum_{r=2}^{\infty} \binom{\beta}{r} c^{r-2} \leq \sum_{r=2}^{\infty} \binom{-|\beta|}{r} c^{r-2} (-1)^r$$

$$\leq \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} (1-x)^{-|\beta|}\Big|_{x=c} = \frac{|\beta|\,(|\beta|+1)}{2}\,(1-c)^{-|\beta|-2}.$$

Sodann schätzen wir die Funktion $k(x)$ auf dem Umfang des Kreises $|1-x|=1$ ab, und zwar auf dem Bogen, auf dem $|x| > c$ ist. Man findet

$$|k(x)| = |x^{-2}\,(1-(1-x)^\beta - \beta\,x)| \leq c^{-2}(1 + 2\,|\beta| + e^{\pi\,|\mathrm{Im}\,\beta|}). \tag{9}$$

Aus den beiden Teilabschätzungen folgt, daß $k(x)$ im Inneren des Kreises $|1-x|=1$ bezüglich x und β gleichmäßig beschränkt ist; dabei kann man sich den Kreis zur Wahrung der Eindeutigkeit der Potenz durch einen von Null ausgehenden Verzweigungsschnitt aufgeschlitzt denken. Damit ist (8) für $t=1$ bewiesen. Zum Beweis für $t>1$ setzen wir $x_t = 1-q^t$. Wenn q^t in dem Winkelraum (4) liegt, so liegt q^t sicher in einem Bereich W, der sich aus dem Kreis $|q| < \sin\varepsilon$ und dem außerhalb dieses Kreises befindlichen Teil des Winkelraums zusammensetzt. Man erkennt das durch eine elementargeometrische Betrachtung, wobei man beachten muß, daß die Winkelhalbierende eines spitzwinkligen Dreiecks stets kleiner als die Wurzel aus dem Produkt der benachbarten Seiten ist. Dem Bereich W entspricht ein x_t-Bereich, der ganz im Kreis $|1-x_t|=1$ liegt, so daß man (9) anwenden kann. Für c wählen wir den Wert $\sin\varepsilon$ und erhalten $|k(x_t)| < M$, wobei M nicht

mehr von t abhängt. Nun gehen wir von x_t wieder zu q^t zurück und beachten, daß die rechte Seite von (8) in dem (aufgeschlitzten) Bereich W regulär ist, so daß man das Maximumprinzip anwenden kann. Es ist dann

$$\frac{1-q^{\beta t}}{1-q^t} = \beta - (1-q^t)\,k\,(1-q^t). \tag{10}$$

Mit etwas geänderter Bezeichnung erhält man daraus (8). Da

$$|1-q^t| \leq t\,|1-q|$$

ist, ist die Hilfsformel vollständig bewiesen.

Es genügt, die Formel (5) für $Re\,\beta \geq m$ zu beweisen. Denn wenn $Re\,\beta < m$ ist, so wähle man die positive ganze Zahl N so, daß $Re(N+\beta) \geq m$ wird, und beachte, daß $\prod_{j=0}^{\infty} f(z\,q^{j+\beta}) = \prod_{j=0}^{N-1} f(z\,q^{j+\beta}) \prod_{j=0}^{\infty} f(z\,q^{j+\beta+N})$ ist. Man hat dann

$$\lim_{q\to 1} \prod_{j=0}^{\infty} \frac{f(z\,q^j)}{f(z\,q^{j+\beta})} = \frac{1}{(f(z))^N} \lim_{q\to 1} \prod_{j=0}^{\infty} \frac{f(z\,q^j)}{f(z\,q^{j+\beta+N})}.$$

Wir wählen $m > 0$ so, daß $|q^\beta| < 1$ wird, und betrachten die Funktion

$$F(z,\beta,q) = \log \prod_{j=0}^{\infty} f(z\,q^{j+\beta}), \tag{11}$$

wobei unter dem Logarithmus der Hauptwert zu verstehen ist. Nach (6) ist $f(z\,q^{j+\beta}) = 1 + z\,q^{j+\beta}\,g(z\,q^{j+\beta})$. Wegen $|q| < 1$ und $Re\,\beta \geq m$ ist $|z\,q^{j+\beta}| < R$, wenn $|z| < R$ ist. Daher wird nach (7)

$$|z\,q^{j+\beta}\,g(z\,q^{j+\beta})| \leq |q^{j+\beta}|\,|z\,g(z)| < |q^{j+\beta}|\,a \leq |q^j|\,a.$$

Die in (5) auftretenden Produkte sind also aus Faktoren der Gestalt $1+|q|^j a_j$ mit beschränkten a_j gebildet, konvergieren mithin absolut. Bezeichnet man die linke Seite von (5) mit $G(z,\beta,q)$, so ist daher

$$\log G(z,\beta,q) = \sum_{j=0}^{\infty} \log f(z\,q^j) - \sum_{j=0}^{\infty} \log f(z\,q^{\beta+j}). \tag{12}$$

Wegen (6) und (7) existiert eine für $|z| < R$ absolut konvergente Potenzreihenentwicklung

$$\log f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n. \tag{13}$$

Die Doppelreihe

$$\sum_{j=0}^{\infty} \log f(z\,q^{\beta+j}) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n q^{(\beta+j)n} \tag{14}$$

konvergiert absolut, da

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|\,|z^n|\,|q^{(\beta+j)n}| = \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|\,|z\,q^\beta|^n \frac{1}{1-|q|^n} < \frac{1}{1-|q|} \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|\,|z\,q^\beta|^n$$

konvergiert. Man darf die Doppelreihe (14) also umordnen und erhält

$$\sum_{j=0}^{\infty} \log f(z\,q^{\beta+j}) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \frac{q^{\beta n}}{1-q^n}. \tag{15}$$

Setzt man dies in (12) ein und berücksichtigt die Hilfsformel (8), so folgt

$$\log G(z,\beta,q) = \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n h(\beta,n,q). \tag{16}$$

Die zweite Reihe wird durch

$$M|1-q| \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|\,|z|^n = M|z|\,|1-q| \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|\,|z|^{n-1}$$

majorisiert, wobei die letzte Reihe konvergiert, da nach (13)

$$\frac{d}{dz} \log f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, b_n z^{n-1}$$

für $|z| < R$ absolut konvergiert. Der zweite Term der rechten Seite von (16) strebt also mit $q \to 1$ gegen Null. Es ergibt sich schließlich

$$\lim_{q\to 1} \log \prod_{j=0}^{\infty} \frac{f(z\,q^j)}{f(z\,q^{\beta+j})} = \beta \log f(z), \tag{17}$$

und das ist gleichbedeutend mit der Behauptung (5).

Nach Durchführung des Beweises kann man auf die durch (7) gegebene Einschränkung der z-Werte verzichten. Die Formel (5) gilt nach dem Fortsetzungsprinzip überall, wo ihre beiden Seiten analytische Funktionen von z sind.

Das Verhalten der durch (14) erklärten Funktion bei der Annäherung $q \to 1$ läßt sich noch etwas näher kennzeichnen. Es gilt:

Wenn der Parameter q auf den durch (4) erklärten Winkelraum beschränkt bleibt, so ist

$$\lim_{q\to 1} (1-q) \log \prod_{j=0}^{\infty} f(z\,q^{j+\beta}) = \int_0^z \log f(y) \frac{dy}{y}.$$

Nach (15) ist nämlich

$$(1-q) \log \prod_{j=0}^{\infty} f(z\,q^{j+\beta}) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n q^{\beta n} \frac{1-q}{1-q^n}. \tag{18}$$

Nun ist für $|q| < 1$ $|1-q^n| \geq 1-|q|$, also für die durch (4) bestimmten q-Werte

$$\left|\frac{1-q}{1-q^n}\right| \leq \frac{|1-q|}{1-|q|} = \frac{|1-q|\,(1+|q|)}{1-|q|^2} \leqq \frac{2p}{2p\cos\varphi - p^2} \leqq \frac{2}{2\sin\varepsilon - p} < \frac{2}{\sin\varepsilon} = K.$$

Die in (18) auftretende Reihe wird durch

$$K \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|\,|z\,q^{\beta}|^n \leqq K \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|\,|z|^n$$

majorisiert, konvergiert also gleichmäßig bezüglich q. Führt man den Grenzübergang $q \to 1$ gliedweise durch, so entsteht die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{z^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^z y^n \frac{dy}{y},$$

die ebenfalls absolut konvergiert. Der gliedweise durchgeführte Grenzübergang ist also erlaubt. Vertauscht man noch rechts die Summation mit der Integration, was zulässig ist, da die entstehende Reihe bezüglich y gleichmäßig konvergiert, so erhält man schließlich

$$\lim_{q \to 1} (1-q) \log \prod_{j=0}^{\infty} f(z\, q^{j+\beta}) = \int_0^z \log f(y) \frac{dy}{y}.$$

Wenn man in (1) $z = q^{1+\alpha}$ setzt, so genügt die entstehende Funktion noch einer anderen Grenzbeziehung. Es gilt:

Es seien α und β zwei beliebige komplexe Zahlen, nur die Werte $\alpha+\beta = 0, -1, -2, \ldots$ seien ausgeschlossen. Es sei ferner $|q| < 1$, und zwar sei q auf den durch (4) *definierten Bereich beschränkt. Dann gilt*

$$\lim_{q \to 1} (1-q)^{-\beta} \prod_{j=0}^{\infty} \frac{1-q^{j+\alpha}}{1-q^{j+\alpha+\beta}} = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)}. \tag{19}$$

Für die Potenzen ist der Hauptwert zu nehmen.

Beim Beweis setzen wir zur Abkürzung

$$(1-q)^{-\beta} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1-q^{j+\alpha}}{1-q^{j+\alpha+\beta}} = H(\alpha, \beta, q). \tag{20}$$

Aus dieser Definition folgt unmittelbar

$$H(\alpha, \beta, q) = \frac{H(1, \alpha+\beta-1, q)}{H(1, \alpha-1, q)}, \tag{21}$$

so daß es genügt, die Formel (19) für $\alpha = 1$ zu beweisen. Wir notieren noch die ebenfalls aus der Definition folgende Beziehung

$$H(\alpha, \beta+1, q) = \frac{1-q^{\alpha+\beta}}{1-q} H(\alpha, \beta, q). \tag{22}$$

Es ist für $Re\ \beta \geq m$

$$\left\{ \begin{aligned} \log \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1-q^j}{1-q^{j+\beta}} &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\log(1-q^j) - \log(1-q^{j+\beta}) \right) \\ &= -\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \left(q^{jr} - q^{(j+\beta)r} \right) = -\sum_{r=1}^{\infty} \frac{q^r}{r} \frac{1-q^{\beta r}}{1-q^r}. \end{aligned} \right. \tag{23}$$

Die Umordnung ist wegen der absoluten Konvergenz der Doppelreihe gestattet. Nach der Hilfsformel (8) ist

$$(24)\qquad \begin{cases} -\sum_{r=1}^{\infty} \frac{q^r}{r} \frac{1-q^{\beta r}}{1-q^r} = -\beta \sum_{r=1}^{\infty} \frac{q^r}{r} - \sum_{r=1}^{\infty} \frac{q^r}{r} h(\beta, r, q) \\ \qquad = \log(1-q)^{\beta} - \sum_{r=1}^{\infty} \frac{q^r}{r} h(\beta, r, q). \end{cases}$$

Die verbleibende Reihe wird durch die Reihe $M|1-q| \sum_{r=1}^{\infty} \frac{|q|^r}{r} r = M \frac{|1-q|}{1-|q|}$ majorisiert. Wie oben im Anschluß an (18) gezeigt wurde, ist dieser Ausdruck für die q-Werte in dem Winkelraum (4) gleichmäßig beschränkt. Die Reihe in (23) konvergiert daher absolut und für $|\beta| < B$ gleichmäßig bezüglich q. Mithin ist der Grenzwert

$$(25)\qquad \lim_{q \to 1} \log(1-q)^{-\beta} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1-q^j}{1-q^{j+\beta}} = \lim_{q \to 1} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{q^r(1-q^r)}{r} h(\beta, r, q)$$

vorhanden, und zwar gleichmäßig bezüglich β, ebenfalls der Grenzwert

$$(26)\qquad K(\beta) = \lim_{q \to 1} (1-q)^{-\beta} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1-q^j}{1-q^{j+\beta}},$$

der folglich, zunächst für $Re\,\beta \geq m$, eine reguläre Funktion darstellt. Von dieser Einschränkung kann man sich leicht befreien, da aus (22) für $\alpha = 1$

$$(27)\qquad K(\beta+1) = (\beta+1) K(\beta)$$

folgt, $K(\beta)$ also durch analytische Fortsetzung auch für $Re\,\beta < m$ ($\beta \neq -1, -2, \ldots$) erklärt werden kann. $K(\beta)$ ist also mit Ausnahme der Werte $-1, -2, \ldots$ für alle endlichen β erklärt und analytisch.

Es sei für das Folgende q reell, $0 < q < 1$, und $\beta = s + i\,t$ ($s > 0$). Wir vergleichen die Faktoren des Produkts (20) (mit $\alpha = 1$) für $t = 0$ und $t \neq 0$. Es ist $|(1-q)^{-s}| = |(1-q)^{-s-it}|$ und $|1-q^{j+s}| < |1-q^{j+s+ti}|$. Daraus folgt, daß $|H(1, s, q)| > |H(1, s+i\,t, q)|$ ist. Für den Grenzfall erhält man

$$(28)\qquad |K(\beta)| \leq |K(s)| \qquad (\beta = s + i\,t,\ s > 0).$$

Wir erkennen, daß $K(\beta)$ auf jeder Vertikalen und damit auch in jedem Vertikalstreifen von endlicher Breite, der in der rechten Halbebene liegt, beschränkt ist. Nach einer Bemerkung von Herrn WIELANDT[2]) stimmt eine Funktion mit dieser Beschränktheitseigenschaft, die der Funktionalgleichung (27) genügt, bis auf eine Konstante mit der Gammafunktion (also hier mit $\Gamma(\beta+1)$) überein. Zur Bestimmung der Konstanten setzen wir

[2]) Vgl. KNOPP, K.: Funktionentheorie, 7. Aufl., Bd. II, S. 47—49, Berlin 1949.

$\beta = 0$ und erhalten aus (20) unmittelbar $K(0) = 1 = \Gamma(1)$. Die Konstante ist also gleich 1, und (19) ist vollständig bewiesen.

Aus (19) kann man leicht die Multiplikationsformel und den Ergänzungssatz der Gammafunktion gewinnen[1]). Es sei noch erwähnt, daß die naheliegende Umformung

$$(1-q)^{-\beta} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1-q^j}{1-q^{j+\beta}} = \prod_{j=1}^{\infty} e^{\beta \frac{q^j}{j}} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1-q^j}{1-q^{j+\beta}} = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{e^{q^j \frac{\beta}{j}}}{1+q^j \frac{1-q^\beta}{1-q^j}}.$$

nicht ohne weiteres zum Ziel führt, obwohl das Produkt rechts auch im Grenzfall $q \to 1$ konvergiert, da die Konvergenz bezüglich q ungleichmäßig ist.

Daß zwischen der Gammafunktion und den unendlichen Produkten der Gestalt $\prod_{j=1}^{\infty} (1-q^{j+\beta})^{-1}$, die zuweilen mit Symbolen wie $\Gamma_q(\beta)$ bezeichnet werden, zahlreiche Analogien bestehen, ist schon lange bekannt[1]). Die Limesformel (19) scheint aber bisher noch nicht bewiesen worden zu sein.

Braunschweig, Mathematisches Institut der Technischen Hochschule.

(Eingegangen am 13. April 1954.)

Einführung in die Atomphysik

Von

Professor Dr.

Wolfgang Finkelnburg

Erlangen

Dritte, umgearbeitete und erweiterte Auflage

Mit 266 Abbildungen

XI, 543 Seiten Gr.-8°. 1954

Ganzleinen DM 44.—

Inhaltsübersicht: Einleitung. — Atome, Ionen, Elektronen, Atomkerne, Photonen. — Atomspektren und Atombau. — Die quantenmechanische Atomtheorie. — Die Physik der Atomkerne. — Physik der Moleküle. — Festkörper-Atomphysik. — Tabelle der für die Atomphysik wichtigsten Konstanten und Beziehungen. — Sachverzeichnis.

Die Atomphysik in dem umfassenden Sinne, in dem sie von Professor Finkelnburg in seinem schon zu einem Standardwerk gewordenen Buch dargestellt wird, hat sich in den letzten Jahren in zunehmendem Maße nicht nur zur Grundlage der gesamten modernen Physik, sondern auch entscheidender Gebiete der reinen und angewandten Chemie, der Astronomie, der Biologie und Medizin, sowie nicht zuletzt der Elektrotechnik und zahlreicher Zweige der Ingenieurwissenschaften entwickelt. Für die wichtige Aufgabe, die Grundlagen der Atomphysik in anschaulicher und verständlicher Weise nicht nur den Studenten aller genannten Fächer, sondern auch ihren schon im Beruf tätigen Vertretern nahe zu bringen, wird die neubearbeitete dritte Auflage sich als besonders geeignet erweisen. Unter Erhaltung der bewährten Darstellungsart der beiden ersten Auflagen ist sie nicht nur auf den neuesten Stand der schnell fortschreitenden Wissenschaft gebracht worden, wobei den Kapiteln über Kernphysik und Festkörperphysik ein ihrer heutigen Bedeutung entsprechender Raum eingeräumt wurde, sondern auch in zahlreichen Einzelheiten ergänzt, verbessert und klarer gefaßt worden.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Soeben erschien:

Materie als Feld

Eine Einführung. Von Dr. phil. **Friedrich Hund**, o. Professor an der Universität Frankfurt a. M. Mit 40 Abbildungen. VIII, 418 Seiten Gr.-8°. 1954.
DM 48.—, Ganzleinen DM 52.—

Inhaltsübersicht: **Grundlagen:** Wirkungsquantum. Lichtteilchen und Materiewellen. Feldtheorie der Materie. — **I. Elektromagnetisches Feld als Vorbild:** Maxwellsche Theorie. Elektromagnetische Wellen. Lokalisierung von Energie und Impuls. Kräfte. Invarianzeigenschaften. Vierervektoren und Tensoren. Vierererschreibweise der Maxwellschen Theorie. Variationsprinzip. Lagrange-Funktion und potentielle Energie. — **II. Vorrelativistisches anschauliches Wellenbild der Materie:** Materiewellen. Wellengleichung. Einfache Wellengruppen. Elektrisch geladene Materie. Reflexion und Brechung. Tunneleffekt. Eigenschwingungen in Potentialmulden. „Übergreifen" der Wellenfunktion. — Streuung von Materiewellen. Variationsprinzip. Kräfte des Materiefeldes. Chemische Kraft. — **III. Relativistisches anschauliches Feldbild der Materie:** De-Broglie-Wellen. Wellengleichung. Energie- und Impulsdichte. Elektrisch geladene Materie. Materie im elektromagnetischen Feld. Variationsprinzip. Langsam bewegte Materie. Energie-Impuls-Tensor. Kräfte des Materiefeldes. Kernkraft. Materieerzeugung im elektrischen Feld. — **IV. Einteilchensystem:** Schrödinger-Gleichung für ein Teilchen. Analyse eines Feldes. Wahrscheinlichkeitsdeutung. Mehrere ungekoppelte Teilchen. Fermi- und Bose-Statistik. Relativistisches Einteilchensystem. — **V. Quantentheorie der Mechanismen:** Gesichtspunkte. Komplementarität und Vertauschungsregeln. Schrödinger-Gleichung. Anderer Ausgangspunkt. Zwei Arten harmonischer Oszillatoren. Harmonischer Oszillator mit komplexen Variablen. Kanonische Variable in der klassischen Mechanik. Die Zeit neben den Ortskoordinaten. Vertauschungsregeln für kanonische Variable. Allgemeine Quantentheorie. Übergang zum Schrödinger-Schema. — **VI. Feldquantelung:** Gesichtspunkte. Vertauschungsregeln und Eigenwerte. Ladung als ganzzahliges Vielfaches der Elementarladung. Kräftefreier Fall. Einfache Übungsaufgabe zur Wellenquantelung. Materieerzeugung. Teilchenzahlen. Feld als Mechanismus. Rechnen mit Entwicklungskoeffizienten. Äquivalenz des gequantelten Feldbildes mit dem gequantelten Teilchenbild (— -Quantelung). Feldquantelung bei Fermi-Statistik. Lorentzinvariante Vertauschungsregel. — **VII. Materie mit Spin 1:** Spin. Richtungseigenschaften bei Spin 1 und 2. Vektorielle Materiewelle im sonst feldfreien Raum. Einfluß eines elektromagnetischen Feldes. Magnetisches Verhalten des Spins. Energie-Impuls-Tensor. Spinanteil des Drehimpulses. Quantelung. — **VIII. Materie mit Spin 1/2:** Spin 1/2. Nichtrelativistische Näherung. Spinorentransformation im relativistischen Fall. Spinoranalysis. Diracsche Gleichung. Ebene Wellen. Einfluß eines elektromagnetischen Feldes. Elektromagnetisches Verhalten des Spins. Kleinsches Paradoxon. Löchertheorie und Materieerzeugung. Vierkomponentige Spinoren. Dirac-Gleichungen mit allgemeinen α- und γ-Operatoren. Besondere α- und γ-Matrizen. Die aus den γ_μ und α^μ gebildeten Tensoren. Energie-Impuls-Tensor. Drehimpuls. Der vom Spin herrührende Anteil von Ladung und Strom. Das Variationsprinzip. Quantelung. — **IX. Allgemeine Feldtheorie:** Allgemeine anschauliche Feldtheorie. Lorentz-Invarianz. Symmetrisierung des kanonischen Tensors. Energie-Impuls-Tensor. Drehimpuls. Phaseninvarianz. Eichinvarianz. Beispiele. Quantelung. — **X. Verknüpfung von Materiearten:** Übersicht. Bekannte Kopplung: Materie und elektromagnetisches Feld. Felder mit Potentialen. Paarerzeugung im Potential hoher Frequenz. Zeitproportionale Übergangswahrscheinlichkeiten. Felder mit Quellen. Kräfte zwischen den Trägern von Quellen. Kopplungstypen dritten Grades (Yukawa-Kopplung). Kopplung vierten Grades (Fermi-Kopplung). Zusammenhalt von Materie. Kernkräfte. Spinabhängige Kernkräfte. — **XI. Elementarteilchen:** Teilchenaspekt. Neue Elementarteilchen. Reaktionen und Kopplungen. Störungsrechnung für Umwandlungen. Störungsrechnung mit Feldquantelung. Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren. Beispiele. Zerfall von Elementarteilchen. Indirekte Kopplungen. Streuvorgänge. — **Literatur. Sachverzeichnis.**

Die Darstellung führt in systematischer Weise in das Feldbild der Materie ein, in den Teil, der noch innerhalb der gewöhnlichen, d.h. logisch abgeschlossenen Quantentheorie liegt, und in seine Weiterbildungen. Dabei ist Wert darauf gelegt, das anschauliche Feldbild der Materie (unter Absehung von den Elementarteilchen) darzulegen, zu dem schon Eigenzustände, Unbestimmtheitsbeziehung, chemische Kraft, Materieerzeugung, Spin, Kernkraft, Materieumwandlung gehören und die Punkte, die die Quantisierung hinzufügt, deutlich herauszuarbeiten.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Diesem Heft liegen zwei Prospekte des Springer-Verlages, Berlin · Göttingen · Heidelberg, und ein Prospekt des Springer-Verlages, Wien, bei.

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg. — Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG., Würzburg.
Printed in Germany.